

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 KHÁI NIỆM VỀ MÔN HỌC SỨC BỀN VẬT LIỆU (SBVL)- ĐỐI TƯỢNG, NHIỆM VỤ, ĐẶC ĐIỂM CỦA MÔN SBVL

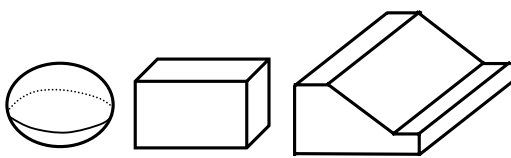
1.1.1 ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU CỦA SBVL- HÌNH DẠNG VẬT THỂ

SBVL nghiên cứu **vật thể thực** (công trình, chi tiết máy ...)

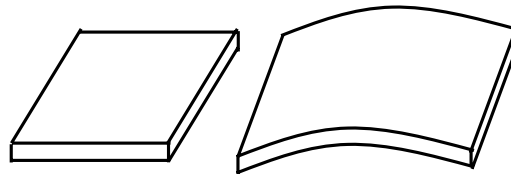
Vật thể thực có biến dạng dưới tác dụng của nguyên nhân ngoài (tải trọng, nhiệt độ, lắp ráp các chi tiết chế tạo không chính xác...)

Vật thể thực sử dụng trong kỹ thuật được chia ra ba loại cơ bản:

Khối: có kích thước theo ba phương tương đương: Đê đập, móng máy...



H. 1.1 Vật thể dạng khối

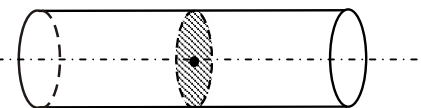


H. 1.2 Vật thể dạng tấm vỏ

Tấm và vỏ: vật thể mỏng có kích thước theo một phương rất nhỏ so với hai phương còn lại; tấm có dạng phẳng, vỏ có dạng cong: sàn nhà, mái vòm

Thanh: vật thể dài có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại: thanh dàn cầu, cột điện, trục máy... **SBVL nghiên cứu thanh, hệ thanh.**

Thanh được biểu diễn bằng **trục thanh** và **mặt cắt ngang F** vuông góc với trục thanh (H.1.3).



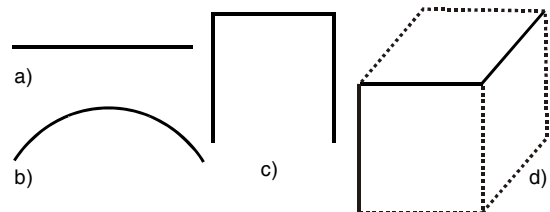
H. 1.3 Trục thanh và mặt cắt ngang

Trục thanh là quỹ tích của trọng tâm mặt cắt ngang.

Các loại thanh (H.1.4):

+Thanh thẳng, cong: trục thanh thẳng, cong,

+Hệ thanh : thanh gãy khúc (phẳng hay không gian)



H. 1.4 Các dạng trục thanh

1.1.2 Nhiệm vụ: SBVL là môn học kỹ thuật cơ sở, nghiên cứu tính chất chịu lực của vật liệu để đề ra các phương pháp tính các vật thể chịu các tác dụng của các nguyên nhân ngoài, nhằm thoả mãn yêu cầu **an toàn và tiết kiệm vật liệu**.

♦ Vật thể làm việc được **an toàn** khi:

- Thỏa **điều kiện bền** : không bị phá hoại (nứt gãy, sụp đổ...).
- Thỏa **điều kiện cứng**: biến dạng và chuyển vị nằm trong một giới hạn cho phép.

- Thỏa **điều kiện ổn định** : bảo toàn hình thức biến dạng ban đầu.

♦ Thường, kích thước của vật thể lớn thì khả năng chịu lực cũng tăng và do đó độ an toàn cũng được nâng cao; tuy nhiên, vật liệu phải dùng nhiều hơn nên nặng nề và tốn kém hơn. Kiến thức của SBVL giúp giải quyết hợp lý mâu thuẫn giữa yêu cầu **an toàn và tiết kiệm vật liệu**.

♦ **Ba bài toán cơ bản của SBVL:**

- + Kiểm tra các điều kiện bền, cứng, ổn định.(Thẩm kế)
- + Định kích thước, hình dáng hợp lý của công trình hay chi tiết máy.
- + Định giá trị của các nguyên nhân ngoài (tải trọng, nhiệt độ...) cho phép tác dụng (Sửa chữa)

1.1.3 Đặc điểm:

♦ SBVL là môn khoa học thực nghiệm: Để đảm bảo sự tin cậy của các phương pháp tính, môn học kết hợp chặt chẽ giữa nghiên cứu thực nghiệm và suy luận lý thuyết.

Nghiên cứu thực nghiệm nhằm phát hiện ra tính chất ứng xử của các vật liệu với các dạng chịu lực khác nhau, làm cơ sở đề xuất các giả thiết đơn giản hơn để xây dựng lý thuyết. Vì vậy, lý thuyết SBVL mang tính gần đúng.

Thí nghiệm kiểm tra các lý thuyết tính toán đã xây dựng

Trong nhiều trường hợp, phải làm thí nghiệm trên mô hình công trình thu nhỏ trước khi xây dựng hoặc thử tải công trình trước khi sử dụng.

♦ SBVL khảo sát nội lực (lực bên trong vật thể) và biến dạng của vật thể (Cơ Lý Thuyết khảo sát cân bằng và chuyển động của vật thể).

♦ SBVL cũng sử dụng các kết quả của Cơ Lý Thuyết

1.2 NGOẠI LỰC- CÁC LOẠI LIÊN KẾT- PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1.2.1 Ngoại lực

a) Định nghĩa: Ngoại lực là lực tác động từ môi trường hoặc vật thể bên ngoài lên vật thể đang xét.

b) Phân loại :

♦ **Tải trọng** : Đã biết trước (vị trí, phương và độ lớn), thường được quy định bởi các quy phạm thiết kế hoặc tính toán theo trạng thái chịu lực của vật thể. Tải trọng gồm:

+**Lực phân bố**: tác dụng trên một thể tích, một diện tích của vật thể (trọng lượng bản thân, áp lực nước lên thành bể...)

Lực phân bố thể tích có thứ nguyên là lực/thể tích, hay $[F/L^3]$.

Lực phân bố diện tích có thứ nguyên là lực/diện tích, hay $[F/L^2]$.

Nếu lực phân bố trên một dải hẹp thì thay lực phân bố diện tích bằng lực phân bố đường với cường độ lực có thứ nguyên là lực/chiều dài, hay $[F/L]$ (H.1.6). Lực phân bố đường là loại lực thường gặp trong SBVL.

+**Lực tập trung**: tác dụng tại một điểm của vật thể, thứ nguyên $[F]$. Thực tế, khi diện tích truyền lực bé có thể coi như lực truyền qua một điểm

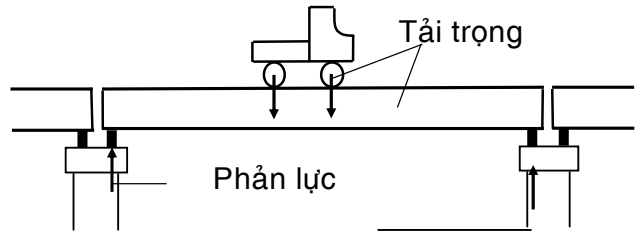
+ **Mômen** (ngẫu lực) có thứ nguyên là lực x chiều dài hay $[FxL]$

♦ **Phản lực** : là những lực thụ động (phụ thuộc vào tải trọng), phát sinh tại vị trí liên kết vật thể đang xét với các vật thể khác.

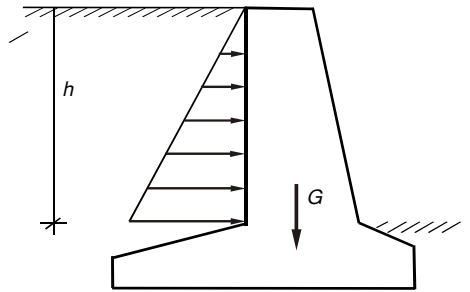
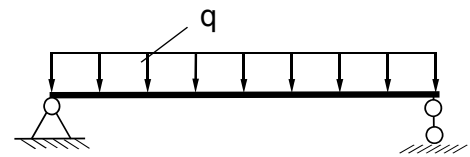
c) Tính chất tải trọng

♦ **Tải trọng tĩnh**: biến đổi chậm hay không đổi theo thời gian, bỏ qua gia tốc chuyển động (bỏ qua lực quán tính khi xét cân bằng). Áp lực đất lên tường chắn, trọng lượng của công trình là các lực tĩnh...

♦ **Tải trọng động**: lực thay đổi nhanh theo thời gian, gây ra chuyển động có gia tốc lớn (rung động do một động cơ gây ra, va chạm của búa xuống đầu cọc...). Với lực động thì cần xét đến sự tham gia của **lực quán tính** .



H. 1.5 Tải trọng và phản lực



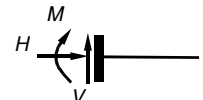
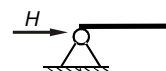
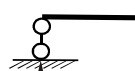
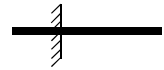
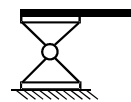
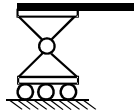
H. 1.6 Các loại lực phân bố

1.2.2 Liên kết phẳng, phản lực liên kết, cách xác định

1.2.2.1 Các loại liên kết phẳng và phản lực liên kết:

Một thanh muốn duy trì hình dạng, vị trí ban đầu khi chịu tác động của ngoại lực thì nó phải được **liên kết** với vật thể khác hoặc với đất.

♦ **Gối di động (liên kết thanh):** ngăn cản một chuyển vị thẳng và phát sinh một phản lực R theo phương của liên kết (H.1.7a)



a)

b)

c)

H. 1.7 Liên kết và phản lực liên kết

♦ **Gối cố định (Liên kết khớp, khớp, bản lề):** ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương

bất kỳ và phát sinh phản lực R cũng theo phương đó. Phản lực R thường được phân tích ra hai thành phần V và H (H.1.7b)

♦ **Ngàm:** ngăn cản tất cả chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay. Phản lực phát sinh trong ngàm gồm ba thành phần V , H và M (H.1.7c)

1.2.2.2 Cách xác định phản lực:

Giải phóng các liên kết, thay bằng các phản lực tương ứng, các phản lực được xác định từ điều kiện cân bằng tĩnh học giữa tải trọng và phản lực.

Bài toán phẳng có ba phương trình cân bằng độc lập, được thiết lập ở các dạng khác nhau như sau:

1. $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_O = 0$ (2 phương X , Y không song song)
2. $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum M_C = 0$ (3 điểm A , B , C không thẳng hàng)
3. $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$ (phương AB không vuông góc với X)

Bài toán không gian có sáu phương trình cân bằng độc lập, thường có dạng: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum Z = 0$; $\sum M_{Ox} = 0$; $\sum M_{Oy} = 0$; $\sum M_{Oz} = 0$

Chú ý: Để cố định một thanh trong mp cần tối thiểu 3 liên kết đơn để chống lại 3 chuyển động tự do. Nếu đủ liên kết và bố trí hợp lý 3 phản lực sẽ tìm được từ 3 ptcb tĩnh học. Thanh được gọi là tĩnh định. Nếu số liên kết tương đương lớn hơn 3 gọi là bài toán siêu tĩnh.

1.3 CÁC DẠNG CHỊU LỰC VÀ BIẾN DẠNG CƠ BẢN – CHUYỂN VỊ

1.3.1 Biến dạng của vật thể:

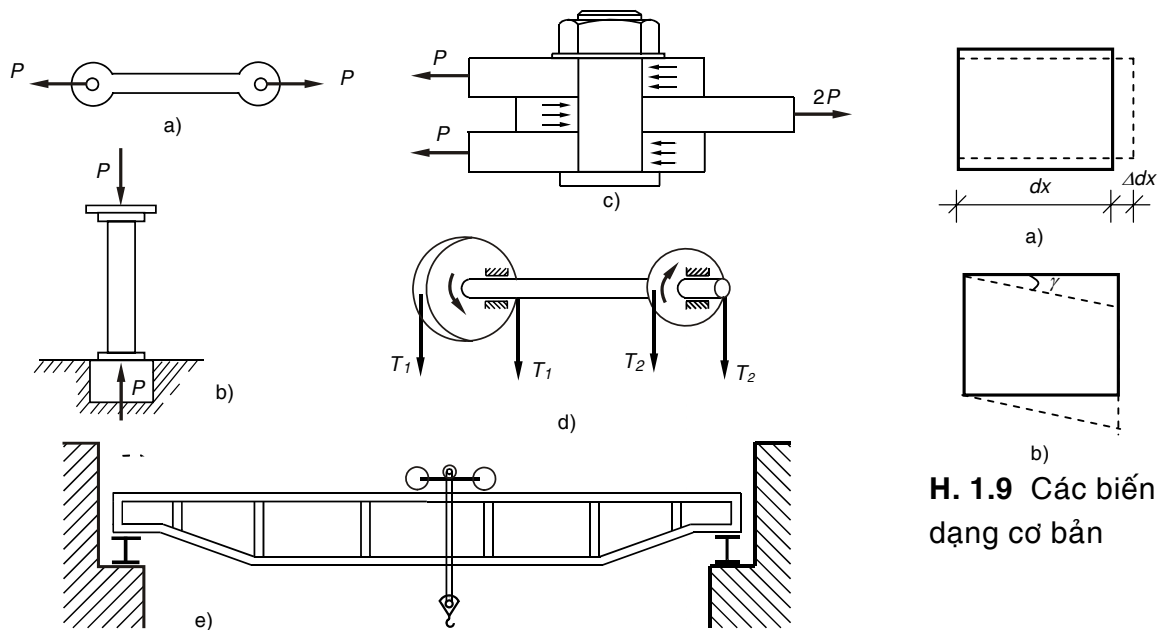
Trong thực tế, sự chịu lực của một thanh có thể phân tích ra các dạng chịu lực cơ bản:

Trục thanh khi chịu kéo (nén) sẽ dãn dài (co ngắn) (H.1.8a,b)

Trục thanh chịu uốn sẽ bị cong (H.1.8e)

Thanh chịu xoắn thì trục thanh vẫn thẳng nhưng đường sinh trên bề mặt trở thành đường xoắn trụ (H1.8.d).

Khi chịu cắt, hai phần của thanh có xu hướng trượt đối với nhau (H1.8.c).



Hình 1.8 Các dạng chịu lực cơ bản

1.3.2 Biến dạng của phân tố: Nếu tưởng tượng tách một phân tố hình hộp từ một thanh chịu lực thì sự biến dạng của nó trong trường hợp tổng quát có thể phân tích ra hai thành phần cơ bản:

- ♦ Phân tố trên H.1.9a dài dx chỉ thay đổi chiều dài, không thay đổi góc.

Biến dạng dài tuyệt đối theo phương x : Δdx .

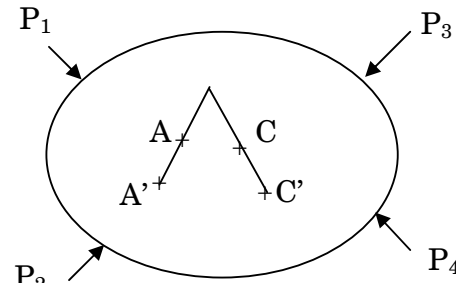
Biến dạng dài tương đối theo phương x : $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$

- ♦ Phân tố trên H.1.9b chỉ có thay đổi góc, không thay đổi chiều dài

Biến dạng góc hay góc trượt, ký hiệu là γ : Độ thay đổi của góc vuông ban đầu

1.3.3 Chuyển vị:

Khi vật thể bị biến dạng, các điểm trong vật thể nói chung bị thay đổi vị trí. Độ chuyển dời từ vị trí cũ của điểm A sang vị trí mới A' được gọi là **chuyển vị dài**. Góc hợp bởi vị trí của một đoạn thẳng AC trước và trong khi biến dạng A'C' của vật thể được gọi là **chuyển vị góc** (H.1.10).



H. 1.10

1.4 Các giả thiết

Khi giải bài toán SBVL, người ta chấp nhận một số giả thiết nhằm đơn giản hoá bài toán nhưng cố gắng đảm bảo sự chính xác cần thiết phù hợp với yêu cầu thực tế.

1.4.1 Giả thiết về vật liệu

Vật liệu được coi là **liên tục, đồng nhất, đẳng hướng và đàn hồi tuyến tính**.

♦ Ta tưởng tượng lấy một phân tử bao quanh một điểm trong vật thể. Nếu cho phân tử bé tùy ý mà vẫn chứa vật liệu thì ta nói vật liệu **liên tục** tại điểm đó.

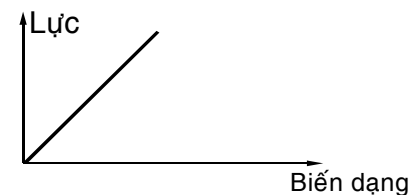
Giả thiết về sự liên tục của vật liệu cho phép sử dụng các phép tính của toán giải tích như giới hạn, vi phân, tích phân.... Trong thực tế, ngay cả với vật liệu được coi là hoàn hảo nhất như kim loại thì cũng có cấu trúc không liên tục.

♦ Vật liệu **đồng nhất** : Tính chất cơ học tại mọi điểm trong vật thể là như nhau.

♦ Vật liệu **đẳng hướng** : Tính chất cơ học tại một điểm theo các phương đều như nhau.

♦ Tính chất **đàn hồi** của vật thể là khả năng khôi phục lại hình dạng ban đầu của nó khi ngoại lực thôi tác dụng. Nếu quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng là bậc nhất, thì vật liệu được gọi là **đàn hồi tuyến tính** (H.1.11).

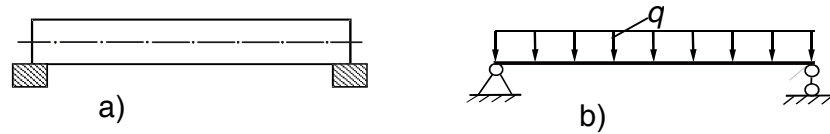
Giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính làm giảm bớt sự phức tạp của bài toán SBVL.



H. 1.11 Đàn hồi tuyến tính

1.4.2 Giả thiết về sơ đồ tính

Khi tính toán, người ta thay vật thể thực bằng sơ đồ tính (H1.12).



H. 1.12 Sơ đồ tính

1.4.3 Giả thiết về biến dạng và chuyển vị

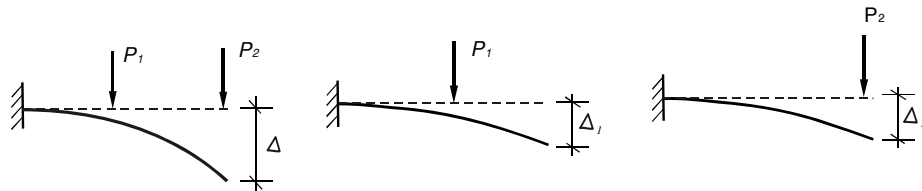
Vật thể có **biến dạng và chuyển vị bé** so với kích thước ban đầu của vật $\Rightarrow$ Có thể khảo sát vật thể hoặc các bộ phận của nó trên hình dạng ban đầu (tính trên sơ đồ không biến dạng của vật thể).

Giả thiết này xuất phát điều kiện biến dạng và chuyển vị lớn nhất trong vật thể phải nằm trong một giới hạn tương đối nhỏ.

Hệ quả:

Khi vật thể có chuyển vị bé và vật liệu đàn hồi tuyến tính thì có thể áp dụng **nguyên lý cộng tác dụng** như sau:

Một đại lượng do nhiều nguyên nhân đồng thời gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng lẻ. (H.1.13)



H.1.13 Nguyên lý cộng tác dụng

Chuyển vị Δ tại đầu thanh do lực P_1 và P_2 gây ra có thể phân tích như sau:

$$\Delta(P_1, P_2) = \Delta_1(P_1) + \Delta_2(P_2)$$

Nguyên lý cộng tác dụng biến bài toán phức tạp thành các bài toán đơn giản dễ giải quyết hơn. Vì vậy, thường được sử dụng trong SBVL.

Chương 2

LÝ THUYẾT NỘI LỰC

2.1 KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC - PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT - ỨNG SUẤT

1- Khái niệm về nội lực:

Xét một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực và ở trạng thái cân bằng (H.2.1). Trước khi tác dụng lực, giữa các phân tử của vật thể luôn có các lực tương tác giữ cho vật thể có hình dáng nhất định. Dưới tác dụng của ngoại lực, các phân tử của vật thể có thể dịch lại gần nhau hoặc tách xa nhau. Khi đó, lực tương tác giữa các phân tử của vật thể phải thay đổi để chống lại các dịch chuyển này. Sự thay đổi của lực tương tác giữa các phân tử trong vật thể được gọi là *nội lực*.

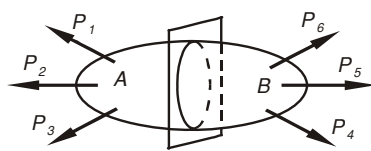
Một vật thể không chịu tác động nào từ bên ngoài thì được gọi là vật thể ở *trạng thái tự nhiên* và nội lực của nó được coi là *bằng không*.

2-Phương pháp khảo sát nội lực: Phương pháp mặt cắt

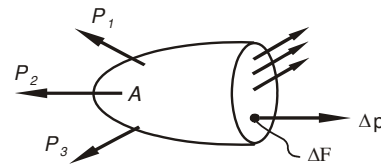
Xét lại vật thể cân bằng và 1 điểm C trong vật thể (H.2.1),.

Tưởng tượng một mặt phẳng Π cắt qua C và chia vật thể thành hai phần A và B; hai phần này sẽ tác động lẫn nhau bằng hệ lực phân bố trên diện tích mặt tiếp xúc theo định luật lực và phản lực.

Nếu tách riêng phần A thì hệ lực tác động từ phần B vào nó phải cân bằng với ngoại lực ban đầu (H.2.2).



H.2.1 Vật thể chịu lực cân bằng



H.2.2 Nội lực trên mặt cắt

Xét một phân tố diện tích ΔF bao quanh điểm khảo sát C trên mặt cắt Π có phương pháp tuyến v . Gọi $\Delta \vec{p}$ là *vector* nội lực tác dụng trên ΔF . Ta định nghĩa ứng suất toàn phần tại điểm khảo sát là:

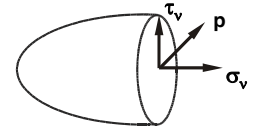
$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta F} = \frac{d\vec{p}}{dF}$$

Thứ nguyên của ứng suất là [lực]/[chiều dài]² (N/m², N/cm²...).

Ứng suất toàn phần p có thể phân ra hai thành phần:

+ Thành phần ứng suất pháp σ_v có phương pháp tuyến của mặt phẳng Π

+ Thành phần ứng suất tiếp τ_v nằm trong mặt phẳng Π (H.2.3).



Hình 2.3 Các thành

phần

ứng suất

Các đại lượng này liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (2.1)$$

Ứng suất là một đại lượng cơ học đặc trưng cho mức độ chịu đựng của vật liệu tại một điểm; ứng suất vượt quá một giới hạn nào đó thì vật liệu bị phá hoại. Do đó, việc xác định ứng suất là cơ sở để đánh giá độ bền của vật liệu, và chính là một nội dung quan trọng của môn SBVL.

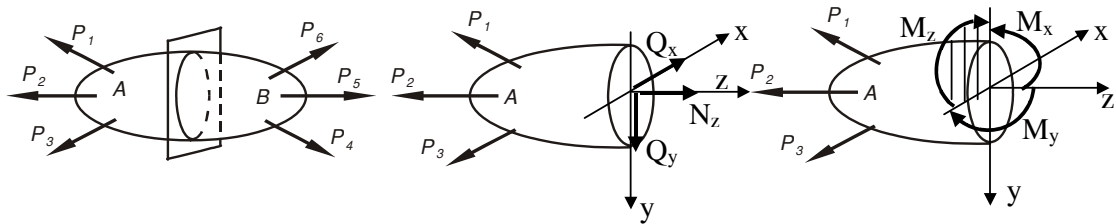
Thừa nhận: Ứng suất pháp σ_v chỉ gây ra biến dạng dài.

Ứng suất tiếp τ_v chỉ gây biến dạng góc.

2.2 CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC - CÁCH XÁC ĐỊNH

1- Các thành phần nội lực:

Như đã biết, đối tượng khảo sát của SBVL là những chi tiết dạng thanh, đặc trưng bởi mặt cắt ngang (hay còn gọi là tiết diện) và trục thanh.



H.2.4 Các thành phần nội lực

Gọi hợp lực của các nội lực phân bố trên mặt cắt ngang của thanh là R . R có điểm đặt và phương chiều chưa biết.

Dời R về trọng tâm O của mặt cắt ngang $\Rightarrow \begin{cases} \text{Lực } R \\ \text{Mômen } M \end{cases}$ có phương bất kỳ

Đặt một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc ngay tại trọng tâm mặt cắt ngang, $Oxyz$, với trục z trùng pháp tuyến của mặt cắt, còn hai trục x, y nằm trong mặt cắt ngang.

Khi đó, có thể phân tích R ra ba thành phần theo ba trục:

- + N_z , theo phương trục z ($\perp$ mặt cắt ngang) gọi là *lực dọc*
- + Q_x theo phương trục x (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.
- + Q_y theo phương trục y (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.

Mômen M cũng được phân ra ba thành phần :

- + Mômen M_x quay quanh trục x gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_y quay quanh trục y gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_z quay quanh trục z gọi là *mômen xoắn*.

Sáu thành phần này được gọi là *các thành phần nội lực* trên mặt cắt ngang (H.2.4)

2 Cách xác định:

Sáu thành phần nội lực trên một mặt cắt ngang được xác định từ sáu phương trình cân bằng độc lập của phần vật thể được tách ra, trên đó có tác dụng của ngoại lực ban đầu P_i và các nội lực.

Các phương trình cân bằng hình chiếu các lực trên các trục tọa độ:

$$\begin{aligned}\sum Z = 0 &\Leftrightarrow N_z + \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \Rightarrow N_z \\ \sum Y = 0 &\Leftrightarrow Q_y + \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \Rightarrow Q_y \\ \sum X = 0 &\Leftrightarrow Q_x + \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \Rightarrow Q_x\end{aligned}\tag{2.2}$$

trong đó: P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - là hình chiếu của lực P_i xuống các trục x, y, z .

Các phương trình cân bằng mômen đối với các trục tọa độ ta có:

$$\begin{aligned}\sum M / O_x &\Leftrightarrow M_x + \sum_{i=1}^n m_x(P_i) = 0 \Rightarrow M_x \\ \sum M / O_y &\Leftrightarrow M_y + \sum_{i=1}^n m_y(P_i) = 0 \Rightarrow M_y \\ \sum M / O_z &\Leftrightarrow M_z + \sum_{i=1}^n m_z(P_i) = 0 \Rightarrow M_z\end{aligned}\tag{2.3}$$

với: $m_x(P_i), m_y(P_i), m_z(P_i)$ - các mômen của các lực P_i đối với các trục x, y, z .

3-Liên hệ giữa nội lực và ứng suất:

Các thành phần nội lực liên hệ với các thành phần ứng suất như sau:

- Lực dọc là tổng các ứng suất pháp
- Lực cắt là tổng các ứng suất tiếp cùng phương với nó
- Mômen uốn là tổng các mômen gây ra bởi các ứng suất đối với trục x hoặc y
- Mômen xoắn là tổng các mômen của các ứng suất tiếp đối với trục z

2-3 BÀI TOÁN PHẪNG:

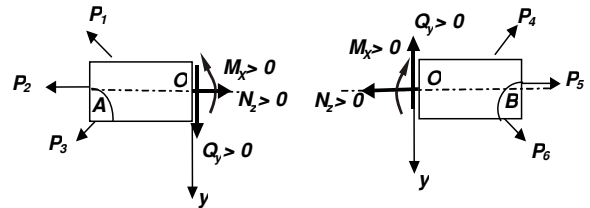
Trường hợp bài toán phẳng (ngoại lực nằm trong một mặt phẳng (thí dụ mặt phẳng yz)), chỉ có ba thành phần nội lực nằm trong mặt phẳng yz : N_z , Q_y , M_x .

♦ Qui ước dấu (H.2.5)

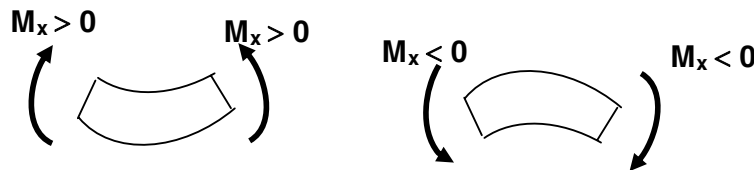
- Lực dọc $N_z > 0$ khi gây kéo đoạn thanh đang xét (có chiều hướng ra ngoài mặt cắt)

- Lực cắt $Q_y > 0$ khi làm quay đoạn thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ.

- Mômen uốn $M_x > 0$ khi căng thớ dưới (thớ y dương).



Hình 2.5: Chiều dương các thành phần nội lực



Mômen $M_x > 0$, Mômen $M_x < 0$

♦ Cách xác định:

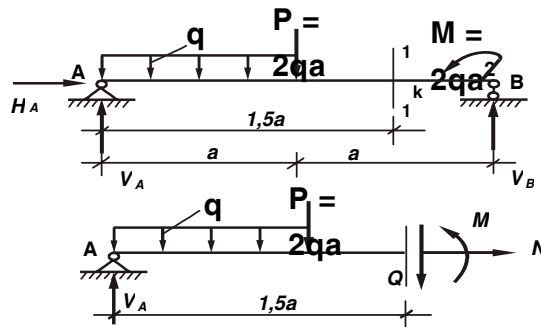
Dùng 3 phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng phần A) hay phần B)

Từ phương trình $\Sigma Z = 0 \Rightarrow N_z$

Từ phương trình $\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y$ (2.4)

Từ phương trình $\Sigma M/O = 0 \Rightarrow M_x$

Thí dụ 2.1 Xác định các trị số nội lực tại mặt cắt 1-1 của thanh AB, với :
 $q = 10 \text{ kN/m}$; $a = 1 \text{ m}$; $M_0 = 2qa^2$. (H.2.6)



H.
2.6

Giải.

Tính phản lực: Giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết V_A , H_A , V_B .

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng thanh AB

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - qa - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow qa \times \frac{a}{2} + P \times a - M_0 - V_B \times 2a = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0; \quad V_A = \frac{11}{4}qa = 27,5 \text{ kN}; \quad V_B = \frac{1}{4}qa = 2,5 \text{ kN}$$

Tính nội lực: Mặt cắt 1-1 chia thanh làm hai phần.

Xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.6) :

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A - qa - P - Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{1}{4}qa = -2,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_{O_1} = 0 \Rightarrow M = V_A \times 1,5a - qa \times a - 2qa \times \frac{a}{2} = \frac{17}{8}qa^2 = 21,25 \text{ kNm}$$

Nếu xét cân bằng của phần phải ta cũng tìm được các kết quả như trên.

2.4 BIỂU ĐỒ NỘI LỰC (BÀI TOÁN PHẪNG)

1. Định nghĩa: Thường các nội lực trên các mặt cắt ngang của một thanh không giống nhau.

Biểu đồ nội lực (BĐNL) là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các nội lực theo vị trí của các mặt cắt ngang. Hay gọi là mặt cắt biến thiên.

Nhờ vào BĐNL có thể xác định vị trí mặt cắt có nội lực lớn nhất và trị số nội lực ấy.

2. Cách vẽ BĐNL- Phương pháp giải tích:

Để vẽ biểu đồ nội lực ta tính nội lực trên mặt cắt ngang ở một vị trí bất kỳ có hoành độ z so với một gốc hoành độ nào đó mà ta chọn trước. Mặt cắt ngang chia thanh ra thành 2 phần. Xét sự cân bằng của một phần (trái, hay phải) , viết biểu thức giải tích của nội lực theo z .

Vẽ đường biểu diễn trên hệ trục tọa độ có trục hoành song song với trục thanh (còn gọi là đường chuẩn), tung độ của biểu đồ nội lực sẽ được diễn tả bởi các đoạn thẳng vuông góc các đường chuẩn.

Thí dụ 2.2- Vẽ BĐNL của dầm nút thừa (H.2.7)

Giải

Xét mặt cắt ngang 1-1 có hoành độ z so với gốc A, ta có ($0 \leq z \leq l$)

Biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt 1-1 được xác định từ việc xét cân bằng phần phải của thanh:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

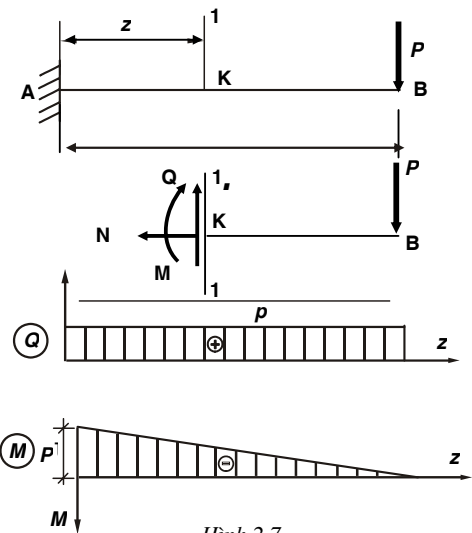
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y - P = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\sum M_{O_1} = 0 \Rightarrow M_x + P(l - z) = 0 \Rightarrow M_x = -P(l - z)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên H.2.7.

Qui ước: +Biểu đồ lực cắt Q_y tung độ dương vẽ phía trên trục hoành.

+Biểu đồ mômen uốn M_x tung độ dương vẽ phía dưới trục hoành.



Hình 2.7

(Tung độ của biểu đồ mômen luôn ở về phía thõ căng của thanh).

Thí dụ 2.3 – Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều q (H.2.8a).

Giải

Phản lực: Bỏ các liên kết tại A và B, thay bằng các phản lực (H.2.8a).

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$\text{Do đối xứng} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Nội lực: Chọn trục hoành như trên H.2.8b. Xét mặt cắt ngang 1-1 tại K có hoành độ là z , ($0 \leq z \leq l$). Mặt cắt chia thành làm hai phần.

Xét cân bằng của phần bên trái AK (H.2.8b)

Từ các phương trình cân bằng ta suy ra:

$$\begin{cases} \sum Z = 0 \Rightarrow N_z = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = \frac{ql}{2} - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ \sum M / O_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z) \end{cases}$$

Q_y là hàm bậc nhất theo z , M_x là hàm bậc 2 theo z .

Cho z biến thiên từ 0 đến l ta vẽ được các biểu đồ nội lực (H2.8).

Cụ thể: +Khi $z=0 \Rightarrow Q_y = ql/2$, $M_x = 0$

+Khi $z=l \Rightarrow Q_y = -ql/2$, $M_x = 0$

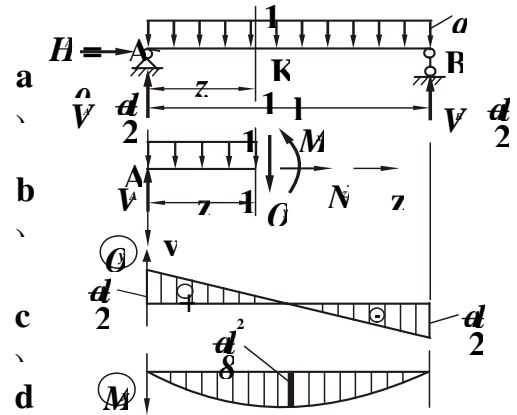
+Tìm $M_{x, \text{cực trị}}$ bằng cách cho đạo hàm $dM_x / dz = 0$,

$$dM_x / dz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ql}{2} - qz = 0 \Rightarrow z = \frac{l}{2} \\ \Rightarrow M_{x, \text{max}} = \frac{ql^2}{8} \end{cases}$$

Qua các BĐNL, ta nhận thấy:

Lực cắt Q_y có giá trị lớn nhất ở mặt cắt sát gối tựa,

Mômen uốn M_x có giá trị cực đại ở giữa dầm.



H.2.8

Thí dụ 2.4 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu lực tập trung P (H.2.9a) .

Giải

Phản lực: Các thành phần phản lực tại các gối tựa là:

$$H_A = 0; V_A = \frac{Pb}{l}; V_B = \frac{Pa}{l}$$

Nội lực : Vì tải trọng có phương vuông góc với trục thanh nên lực dọc N_z trên mọi mặt cắt ngang có trị số bằng không.

Phân đoạn thanh: Vì tính liên tục của các hàm số giải tích biểu diễn các nội lực nên phải tính nội lực trong từng đoạn của thanh; trong mỗi đoạn phải không có sự thay đổi đột ngột của ngoại lực .

♦ Đoạn AC- Xét mặt cắt 1-1 tại điểm K_1 trong đoạn AC và cách gốc A một đoạn z , ($0 \leq z \leq a$).

Khảo sát cân bằng của phần bên trái ta được các biểu thức giải tích của nội lực:

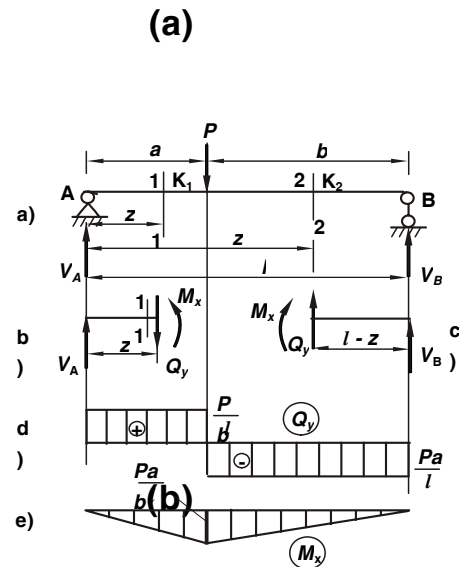
$$\begin{cases} Q_y = V_A = \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \\ M_x = V_A \cdot z = \frac{Pb}{l} z = \frac{P(l-a)}{l} z \end{cases}$$

♦ Đoạn CB- Xét mặt cắt 2-2 tại điểm K_2 Trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z , ($a \leq z \leq l$). Tính nội lực trên mặt cắt 2-2 bằng cách xét phần bên phải (đoạn K_2B). Ta được:

$$\begin{aligned} Q_y &= -V_B = -\frac{Pa}{l} \\ M_x &= V_B(l-z) = \frac{Pa}{l}(l-z) \end{aligned} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực như H.2.9d,e.

Trường hợp đặc biệt : Nếu $a=b= L/2$, khi đó mômen cực đại xảy ra tại giữa dầm và có giá trị: $M_{\max} = PL/4$



H. 2.9

Thí dụ 2.5 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tác dụng của mômen tập trung M_o (H.2.10a.)

Giải

Phản lực: Xét cân bằng của toàn dầm ABC $\Rightarrow$ các phản lực liên kết tại A và B là: $H_A = 0$; $V_A = V_B = \frac{M_o}{l}$, chiều phản lực như H.2.10a.

Nội lực:

Đoạn AC: Dùng mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z_1 ; ($0 \leq z_1 \leq a$). Xét cân bằng của đoạn AK_1 bên trái mặt cắt $K_1 \Rightarrow$ các nội lực

$$\text{như sau } \begin{cases} Q_{y_1} = -V_A = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_1} = -V_A z_1 = -\frac{M_o}{l} z_1 \end{cases} \quad (c)$$

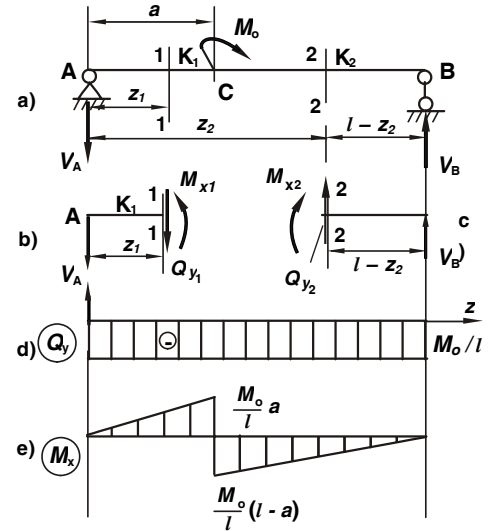
Đoạn CB: Dùng mặt cắt 2-2 trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z_2 với ($a \leq z_2 \leq l$). Xét cân bằng của phần bên phải $K_2B \Rightarrow$ các biểu thức nội lực trên mặt cắt 2-2 là:

$$\begin{cases} Q_{y_2} = -V_B = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_2} = V_B(l - z_2) = \frac{M_o}{l}(l - z_2) \end{cases} \quad (d)$$

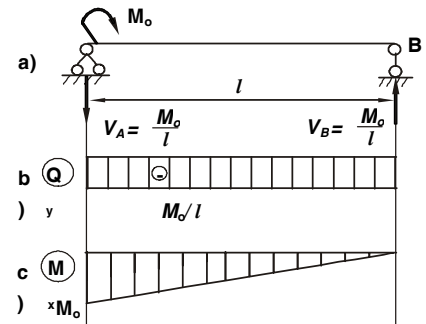
BĐNL được vẽ từ các biểu thức (c), (d) của nội lực trong hai đoạn (H.2.10d-e).

Trường hợp đặc biệt: Mômen tập trung M_o đặt tại mặt cắt sát gối tựa A (H.2.11).

Q_y và M_x sẽ được xác định bởi (d) ứng với $a = 0$. BĐNL vẽ như H.2.11



H. 2.10



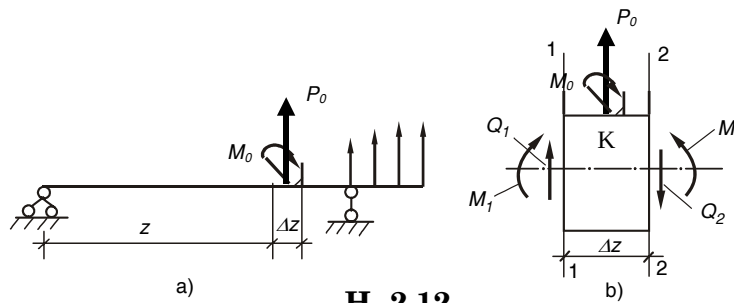
H. 2.11

Các nhận xét :

- Nơi nào có lực tập trung, biểu đồ lực cắt nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số lực tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều lực tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

- Nơi nào có mômen tập trung, biểu đồ mômen uốn nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số mômen tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều mômen tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

Kiểm chứng các nhận xét :



H. 2.12

Khảo sát đoạn Δz bao quanh một điểm K có tác dụng lực tập trung P_0 , mômen tập trung M_0 (H.2.12b).

Viết các phương trình cân bằng $\Rightarrow$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_1 + P_0 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 - Q_1 = P_0 \quad (i)$$

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow M_1 + M_0 - M_2 + Q_1 \frac{\Delta z}{2} - Q_2 \frac{\Delta z}{2} = 0$$

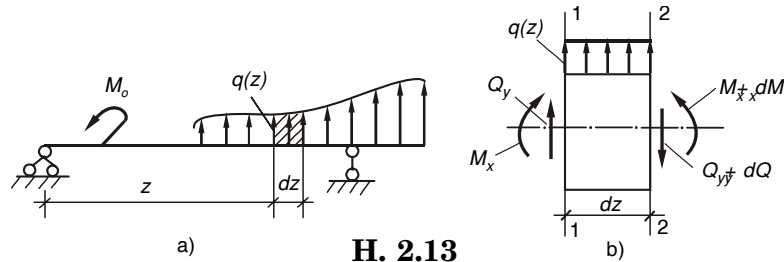
$$\text{Bỏ qua vô cùng bé bậc một } Q_1 \frac{\Delta z}{2}, Q_2 \frac{\Delta z}{2}, \Rightarrow M_2 - M_1 = M_0 \quad (ii)$$

Biểu thức (i) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ lực cắt.

Biểu thức (ii) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ mômen.

2.4. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ TRONG THANH THẲNG

Xét một thanh chịu tải trọng bất kỳ (H.2.13a). Tải trọng tác dụng trên thanh này là lực phân bố theo chiều dài có cường độ $q(z)$ có chiều dương hướng lên (H.2.13b).



H. 2.13

Khảo sát đoạn thanh vi phân dz , giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (H.2.13b). Nội lực trên mặt cắt 1-1 là Q_y và M_x . Nội lực trên mặt cắt 2-2 so với 1-1 đã thay đổi một lượng vi phân và trở thành $Q_y + dQ_y$; $M_x + dM_x$. Vì dz là rất bé nên có thể xem tải trọng là phân bố đều trên đoạn dz .

Viết các phương trình cân bằng:

1-Tổng hình chiếu các lực theo phương đứng

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0 \\ \Rightarrow q(z) &= \frac{dQ_y}{dz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Đạo hàm của lực cắt bằng cường độ của lực phân bố vuông góc với trục thanh.

2- Tổng mômen của các lực đối với trọng tâm mặt cắt 2-2 ta được:

$$\sum M/o_2 = 0 \Rightarrow Q_y dz + q(z) \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + M_x - (M_x + dM_x) = 0$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc hai $q(z) \cdot \frac{dz^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (2.5)$$

Đạo hàm của mômen uốn tại một mặt cắt bằng lực cắt tại mặt cắt đó

$$\text{Từ (2.4) và (2.5)} \Rightarrow \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z) \quad (2.6)$$

nghĩa là: Đạo hàm bậc hai của mômen uốn tại một điểm chính là bằng cường độ của tải trọng phân bố tại điểm đó.

Thí dụ 2.6 Vẽ BĐNL cho dầm đơn giản AB chịu tác dụng của tải phân bố bậc nhất như H.2.14.

Giải

.Phản lực: Giải phóng liên kết, đặt các phản lực tương ứng ở các gối tựa, xét cân bằng của toàn thanh,

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow V_A l = \frac{1}{2} \times q_0 l \times \frac{l}{3} \Rightarrow V_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

.Nội lực: Cường độ của lực phân bố ở mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z cho bởi: $q(z) = q_0 \frac{z}{l}$

Dùng mặt cắt 1-1 và xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.14b).

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = V_A - q(z) \frac{z}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l} \quad (e)$$

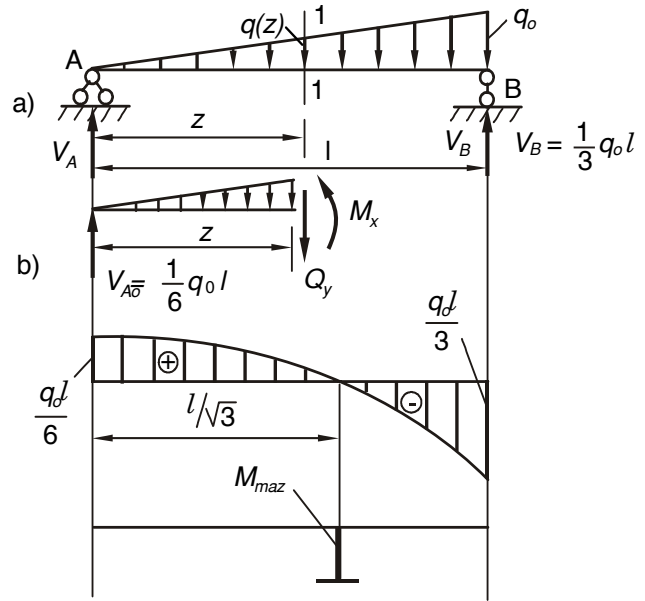
$$\sum M/o_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{q_0 l}{6} z - q(z) \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3} = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^3}{6l} \quad (g)$$

Từ (e) và (g) ta vẽ được biểu đồ lực cắt và mômen cho dầm đã cho. Các biểu đồ này có tính chất như sau:

Biểu đồ lực cắt Q_y có dạng bậc 2. Tại vị trí $z = 0$, $q(z) = 0$ nên ở đây biểu đồ Q_y đạt cực trị: $(Q_y)_{z=0} = Q_{\max} = q_0 l / 6$

Biểu đồ mômen uốn M_x có dạng bậc 3. Tại vị trí $z = l/\sqrt{3}$; $Q_y = 0$. Vậy tại đây M_x đạt cực trị:

$$(M_x)_{z=\frac{l}{\sqrt{3}}} = M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$



H.2.14

Thí dụ 2.7 Vẽ BĐNL cho dầm chịu lực tổng quát (H.2.15)

Giải

Phản lực: Giải phóng liên kết, xét cân bằng toàn thanh, suy ra phản lực liên kết tại A và C là:

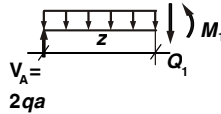
$$H_A = 0, \quad V_A = 2qa; \quad V_C = 2qa$$

Nội lực:

* Đoạn AB: Mặt cắt 1-1, gốc A ($0 \leq z \leq a$), xét cân bằng phần trái

•

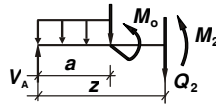
$$\begin{cases} Q_1 = 2qa - qz \\ M_1 = 2qaz - \frac{qz^2}{2} \end{cases}$$



* Đoạn BC: Mặt cắt 2-2, gốc A ($a \leq z \leq 2a$)

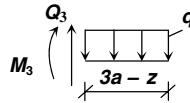
và xét cân bằng phần trái:

$$\begin{cases} Q_2 = -qa \\ M_2 = -qaz + \frac{3}{2}qa^2 \end{cases}$$

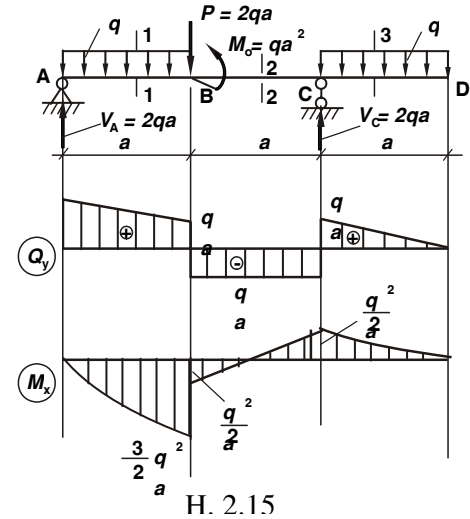


* Đoạn CD: Mặt cắt 3-3, gốc A, ($2a \leq z \leq 3a$) xét cân bằng phần phải:

$$\begin{cases} Q_3 = q(3a - z) \\ M_3 = -q \frac{(3a - z)^2}{2} \end{cases}$$

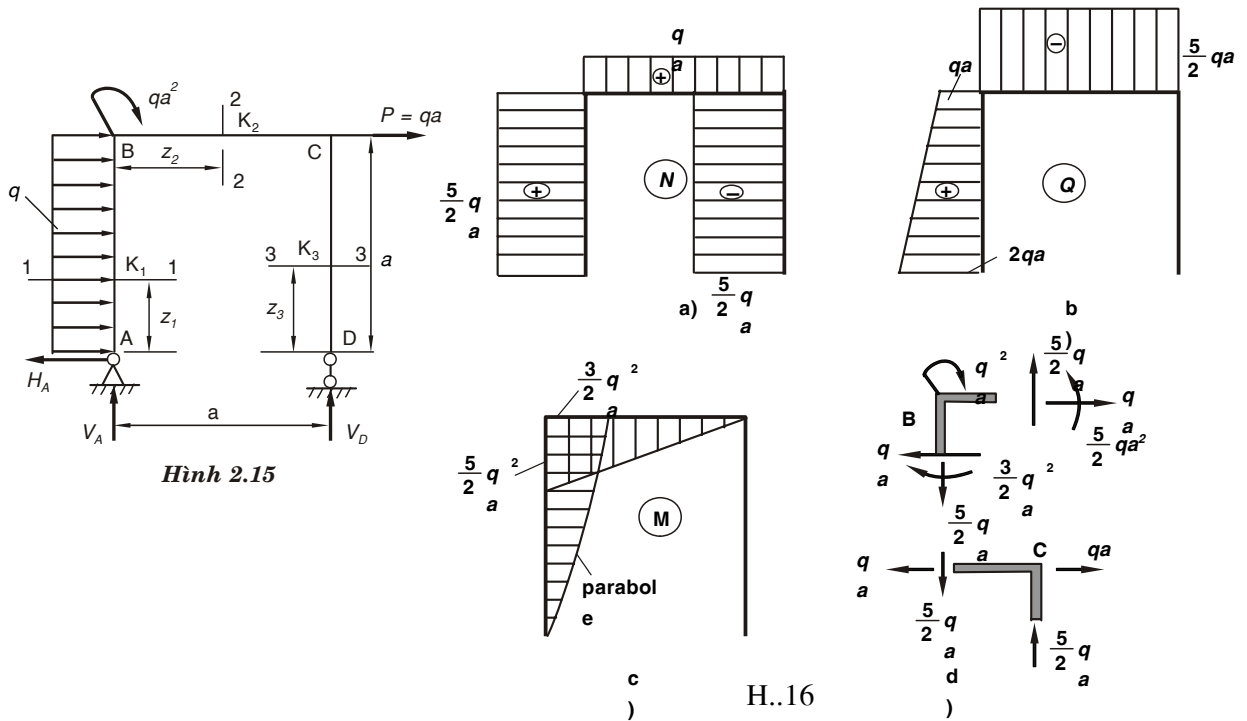


$$(2a \leq z \leq 3a)$$



Biểu đồ mômen và lực cắt vẽ như H.2.15.

Thí dụ 2.8 Vẽ biểu đồ nội lực trong khung chịu tải trọng như trên H.2.16.



Giải

Tính phản lực liên kết

Xét sự cân bằng của toàn khung dưới tác dụng của tải trọng ngoài và các phản lực liên kết ta suy ra:

$$\sum \text{Ngang} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M/D = 0 \Rightarrow V_a \times a + qa \times \frac{a}{2} + qa^2 + qa \times a = 0 \rightarrow V_A = -\frac{5}{2}qa$$

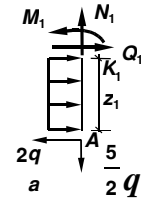
$$\sum \text{Đứng} = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 0 \Rightarrow V_D = +\frac{5}{2}qa \quad (\text{Đúng chiều đã chọn})$$

Vậy chiều thật của V_A ngược với chiều đã chọn

Vẽ biểu đồ nội lực

Đoạn AB: dùng mặt cắt 1-1 và xét cân bằng đoạn AK₁ ta được:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{5}{2}qa \\ Q_1 = 2qa - qz_1 \\ M_1 = 2qaz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \end{cases} \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

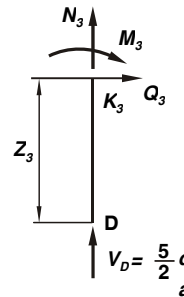


Đoạn BC: dùng mặt cắt 2-2 và xét cân bằng đoạn ABK₂ ta được:

$$\begin{cases} N_2 = qa \\ Q_2 = -\frac{5}{2}qa \\ M_2 = \frac{5}{2}qa^2 - \frac{5}{2}qaz_2 \end{cases} \quad (0 \leq z_2 \leq a)$$

Đoạn CD: dùng mặt cắt 3-3 và xét cân bằng DK₃

$$\begin{cases} N_3 = -\frac{5}{2}qa \\ Q_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{cases} \quad (0 \leq z_3 \leq a)$$



Kiểm tra sự cân bằng nút

Đối với khung, có thể kiểm tra kết quả bằng việc xét cân bằng các nút. Nếu tách nút ra khỏi hệ thì ta phải đặt vào nút các ngoại lực tập trung (nếu có) và các nội lực tại các mặt cắt, giá trị của chúng được lấy từ biểu đồ vừa vẽ.

Sau khi đặt các lực trên, nếu tính đúng các nội lực ở các nút thì nút sẽ cân bằng, nghĩa là các phương trình cân bằng được thỏa mãn. Ngược lại, nếu các phương trình không thỏa mãn thì các nội lực tính sai.

Cụ thể đối với khung đang xét, ta tách nút B và đặt vào đó mômen tập trung qa^2 và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d:

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $5qa^2/2$ có chiều hướng lên và mômen $5qa^2/2$ gây căng thớ dưới.

- Tại mặt cắt trên thanh đứng có lực dọc $+5qa/2$ hướng ra ngoài mặt cắt (hướng xuống) lực cắt $+qa$ hướng từ phải sang trái và mômen $3qa^2/2$ gây ra căng thớ trong khung nên chiều quay có mũi tên hướng ra ngoài.

Ta dễ dàng thấy các phương trình cân bằng thỏa mãn:

$$\sum X = 0 ; \sum Y = 0 ; \sum M/B = 0$$

Tương tự, tách nút C và đặt vào đó lực tập trung qa hướng từ trái sang phải và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d.

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $-5qa/2$ có khuynh hướng làm quay phần đoạn thanh đang xét ngược chiều kim đồng hồ nên có chiều hướng xuống, còn mômen thì bằng không.

- Tại mặt cắt trên thanh thẳng đứng tồn tại lực dọc $-5qa/2$ có chiều hướng vào mặt cắt (hướng lên) và không có lực cắt cũng như mômen.

Ta dễ dàng thấy rằng các phương trình cân bằng được thỏa mãn:

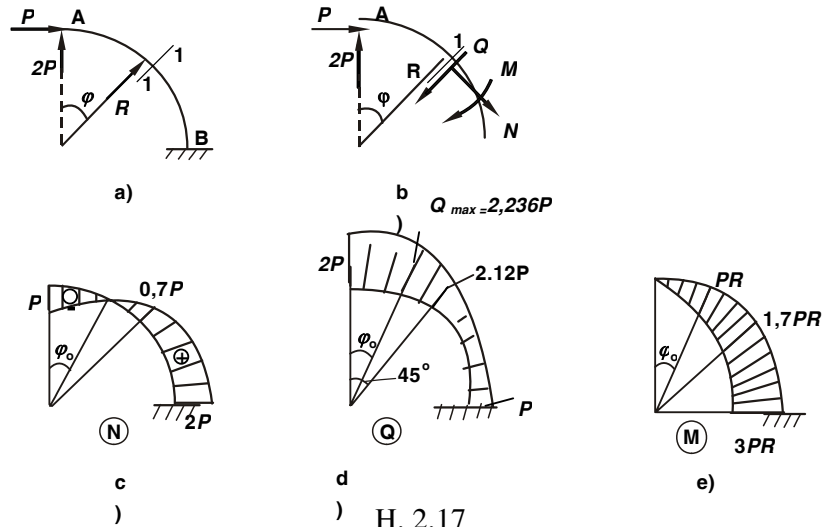
$$\sum X = -qa + qa = 0 ; \quad \sum Y = -\frac{5}{2}qa + \frac{5}{2}qa = 0 ; \quad \sum M/B = 0$$

Vậy các nút B và C đều cân bằng nghĩa là các hệ nội lực tại các nút đúng.

Thí dụ 2.9 Vẽ BĐNL trong thanh cong (H.2.17)

Giải

Cắt thanh tại tiết diện 1-1, xác định bởi góc φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$), xét cân bằng của phần trên dưới tác dụng của các ngoại lực và các thành phần nội lực đặt theo chiều dương quy ước như H.2.17b.



Phương trình cân bằng hình chiếu các lực

theo phương pháp tuyến với mặt cắt cho: $N = 2P \sin \varphi - P \cos \varphi = P(2 \sin \varphi - \cos \varphi)$ (a)

Phương trình cân bằng hình chiếu các lực theo phương đường kính cho: $Q = 2P \cos \varphi + P \sin \varphi = P(2 \cos \varphi + \sin \varphi)$ (b)

Phương trình cân bằng của các mômen các lực đối với trọng tâm mặt cắt dẫn đến:

$$M = -2PR \sin \varphi - PR(1 - \cos \varphi) = -PR(2 \sin \varphi + 1 - \cos \varphi) \quad (c)$$

Cho φ một vài trị số đặc biệt và tính các trị số nội lực tương ứng, ta vẽ được biểu đồ.

Lực cắt đạt cực trị khi $\frac{dQ}{d\varphi} = 0$, nghĩa là khi:

$$-2 \sin \varphi + \cos \varphi = 0 \Rightarrow \tan \varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = \varphi_0 = 26^\circ 56'$$

$$\sin \varphi_0 = 0,4472 ; \quad \cos \varphi_0 = 0,8944$$

Ta có bảng nội lực sau:

φ	0	φ_0	45°	90°
N	$-P$	0	$0,7 P$	$2 P$
Q	$2 P$	$2,236 P$	$2,12 P$	$+P$
M	0	$-PR$	$-1,7 PR$	$-3PR$

Khi vẽ cần chú ý đặt các tung độ theo phương vuông góc với trục thanh, tức là theo phương bán kính như trên H.2.17c,d,e.

2.5 CÁCH VẼ BIỂU ĐỒ NHANH

2.5.1 Phương pháp vẽ từng điểm

Dựa trên các liên hệ vi phân, ta định dạng các BĐNL tùy theo dạng tải trọng đã cho và từ đó ta xác định số điểm cần thiết để vẽ biểu đồ.

Trên 1 đoạn thanh

+ $q = 0 \Rightarrow Q = \text{hằng số}, M = \text{bậc nhất}.$

+ $q = \text{hằng} \Rightarrow Q = \text{bậc nhất}, M = \text{bậc hai}.$

+ Nếu biểu đồ có dạng hằng số, chỉ cần xác định một điểm bất kỳ.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc nhất, cần tính nội lực tại hai điểm đầu và cuối đoạn thanh.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc hai trở lên thì cần ba giá trị tại điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm bậc hai. Đoạn thanh có lực phân bố q hướng xuống sẽ âm, nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng lên. Ngược lại, nếu q hướng lên sẽ dương nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng xuống. Tóm lại, đường cong mômen hứng lấy lực phân bố q .

Thí dụ 2.10: Vẽ BĐNL trong dầm cho trên H.2.18 (phương pháp vẽ điểm)

Giải.

Phản lực liên kết

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow -qa^2 + 2qa^2 + 2qa^2 - V_C \times 2a = 0 \Rightarrow V_C = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}qa$$

Nội lực

Đoạn AB: $q=0 \Rightarrow Q_y = \text{hằng số}$,
 $M_x = \text{bậc nhất}$.

Trong trường hợp này Q_y là hằng số bằng không vì $Q_A^{(AB)} = 0$.

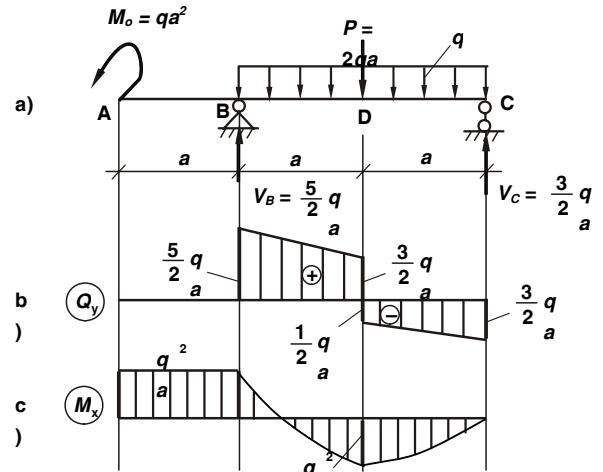
$\Rightarrow M_x$ trong đoạn này sẽ là hằng số

$$M_A^{(AB)} = M_B^{(BA)} = -M_o = -qa^2$$

Đoạn BD: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$,
 $M_x = \text{bậc 2}$.

$$\text{Tại B: } \begin{cases} Q_B^{(BD)} = +\frac{5}{2}qa \\ M_B^{(BD)} = -M_o = -qa^2 \end{cases}$$

$$\text{Tại D: } \begin{cases} Q_D^{(BD)} = \frac{5}{2}qa - qa = \frac{3}{2}qa \\ M_D^{(BD)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2 \end{cases}$$



Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại B và D bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

Đoạn DC: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$, $M_x = \text{bậc 2}$.

$$\text{Tại D: } Q_D^{(DC)} = -\frac{1}{2}qa ; M_D^{(DC)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$$

$$\text{Tại C: } Q_C = -V_C = -\frac{3}{2}qa ; M_C = 0$$

Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

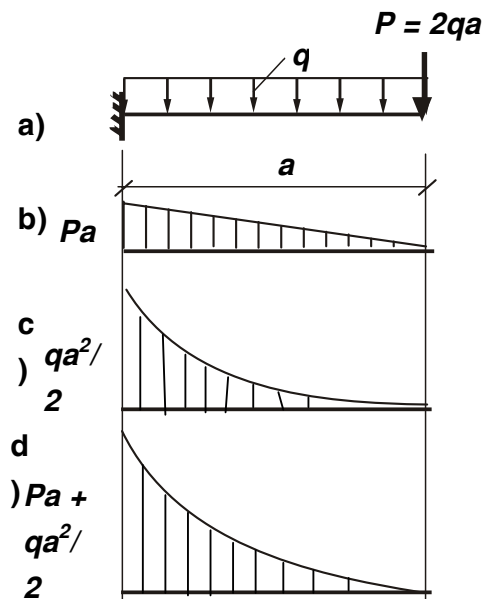
Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại D và C bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

Các biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x lần lượt được vẽ trên H.2.18b,c.

2.5.2 Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Khi thanh chịu tác dụng nhiều loại tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ nội lực trong thanh do từng tải trọng riêng lẻ gây ra rồi cộng đại số lại để được kết quả cuối cùng.

Thí dụ 10. Vẽ biểu đồ mô men trong dầm như H.2.18a bằng cách cộng biểu đồ.



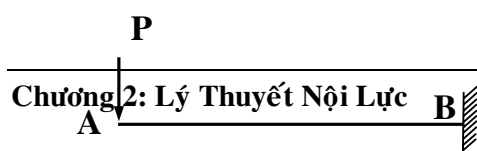
H.2.18

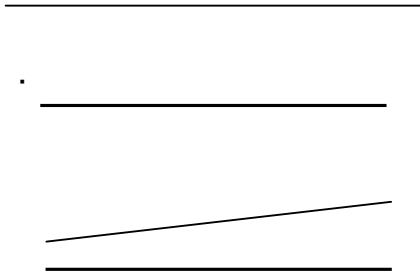
Giải. Tải trọng trên thanh được chia thành hai trường hợp cơ bản:

- + Hình 2.18b biểu diễn mô men do lực tập trung P gây ra
- + Hình 2.18c biểu diễn mô men do lực phân bố đều q gây ra

Hình 2.18d biểu diễn mô men tổng hợp cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số các tung độ tại các tiết diện tương ứng trên H.2.18b,c

Bảng tóm tắt dầm console , dầm đơn giản, dầm đầu thừa

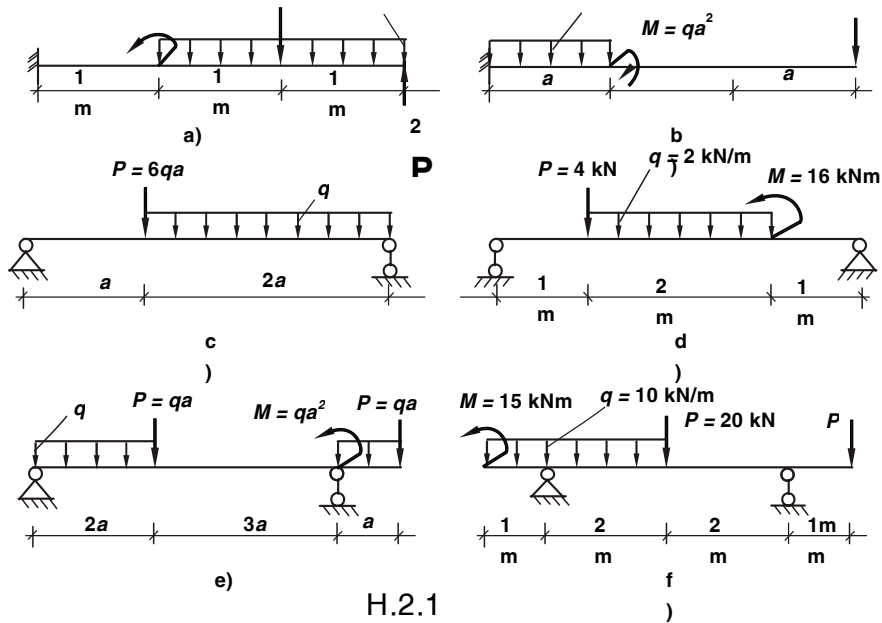




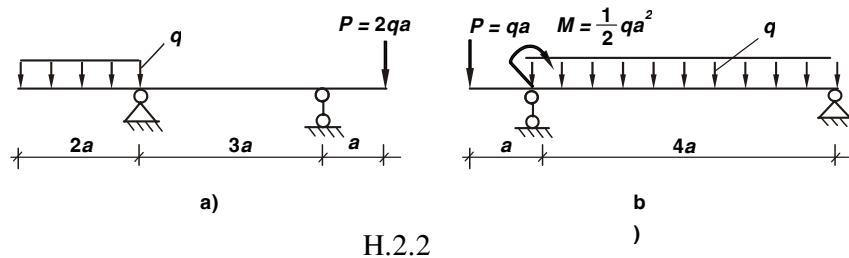
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên H.2.1.

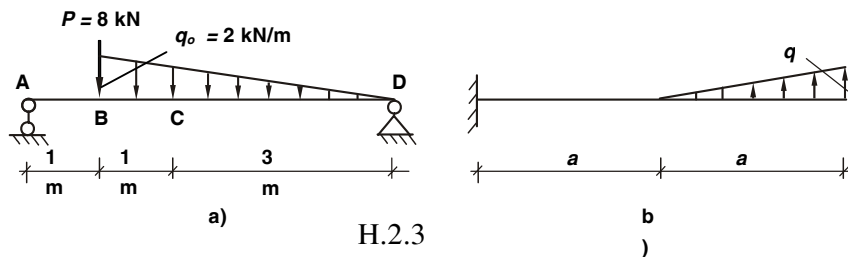
$$M = 10 \text{ kNm} \quad P = 5 \text{ kN} \quad q = 5 \text{ kN/m} \quad q \quad P = 2qa$$



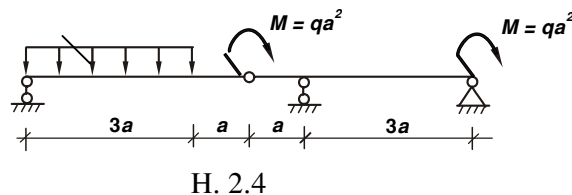
2.2. Không cần tính ra phản lực, vẽ BĐNL của các dầm cho trên H.2.2.



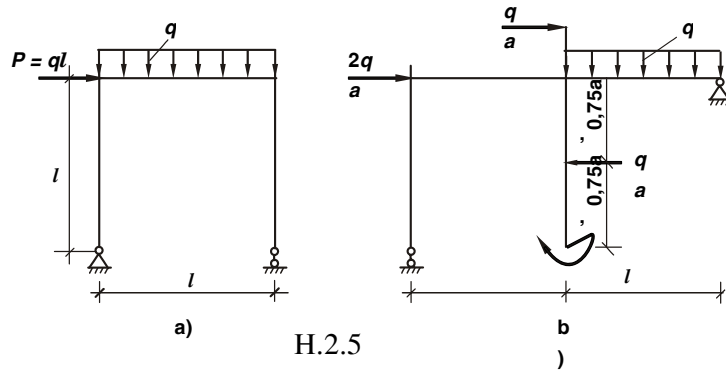
2.3. Vẽ biểu đồ nội lực như trên H.2.3.



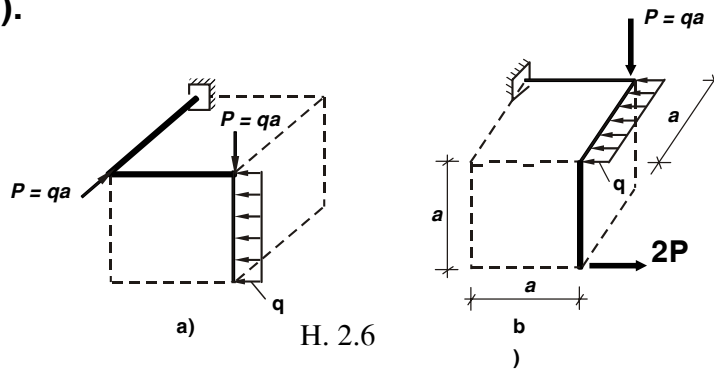
2.4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định như trên H.2.4.



2.5. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung sau (H.2.5).



2.6. Vẽ biểu đồ lực dọc, mômen uốn, mômen xoắn cho thanh không gian (H.2.6).



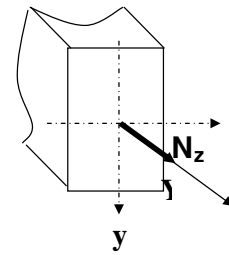
Chương 3. KÉO - NÉN ĐÚNG TÂM

3.1 KHÁI NIỆM

♦ Định nghĩa: Thanh được gọi là chịu kéo hay nén đúng tâm khi trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N_z .

$N_z > 0$ khi hướng ra ngoài mặt cắt- Kéo

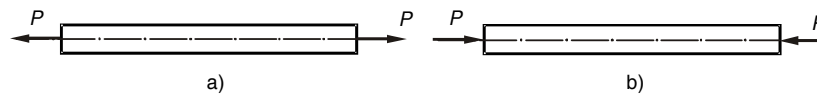
$N_z < 0$ khi hướng vào trong mặt cắt- Nén



H. 3.1

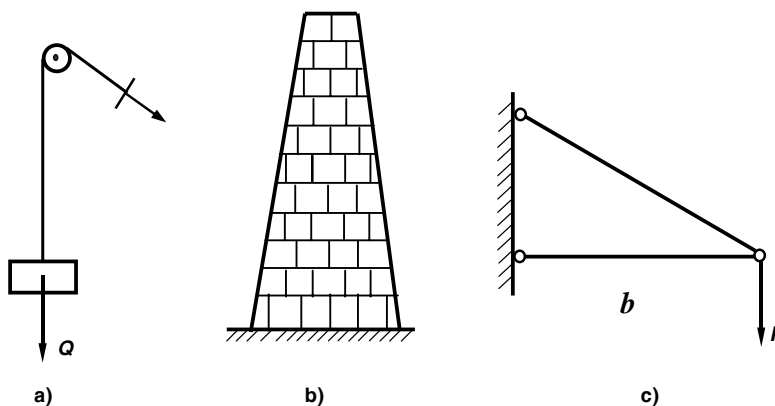
Đây là trường hợp chịu lực đơn giản nhất. Ta gặp trường hợp này khi thanh chịu 2 lực ở bằng nhau và trái chiều ở hai đầu dọc trục thanh.

Thanh chịu kéo đúng tâm (H.3.2a) hay chịu nén đúng tâm (H.3.2b).



H. 3.2 Định nghĩa thanh chịu kéo nén đúng tâm

♦ Thực tế : có thể gặp các cấu kiện chịu kéo hay nén đúng tâm như: dây cáp trong cần cẩu (H.3.3a), ống khói (H.3.3b), các thanh trong dàn (H.3.3c).

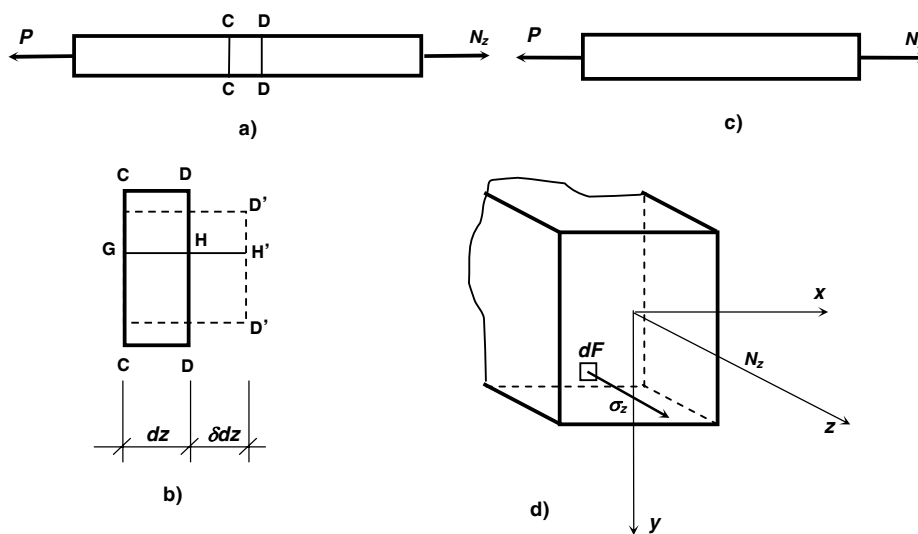


H. 3.3 Một số cấu kiện chịu kéo nén đúng tâm

3.2. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT NGANG

Xét thanh thẳng chịu kéo (nén) đúng tâm (H.3.3a) các mặt cắt ngang CC và DD trước khi thanh chịu lực cách nhau đoạn dz và vuông góc trục thanh. Các thớ dọc trong đoạn CD (như là GH) bằng nhau (H.3.3b).

Khi thanh chịu kéo (nén), nội lực trên mặt cắt ngang DD hay bất kỳ mặt cắt ngang khác là $N_z = P$ (H.3.3c) thanh sẽ dãn ra, mặt cắt DD di chuyển dọc trục thanh z so với mặt cắt CC một đoạn bé δdz (H.3.3b).



Ta thấy biến dạng các thớ dọc như GH đều bằng HH' và không đổi, mặt cắt ngang trong suốt quá trình biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh, điều này cho thấy các điểm trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp σ_z không đổi (H.3.3d).

Ta có: $\int_F \sigma_z dF = N_z$ vì $\left(\varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \right)$

Nên $\sigma_z = \text{const}$ ta được: $\sigma_z F = N_z$

hay:
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (3.1)$$

với: F - diện tích mặt cắt ngang của thanh.

3.3. BIẾN DẠNG CỦA THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

1- Biến dạng dọc

Biến dạng dọc trục z của đoạn dài dz chính là δdz (H.3.3b).

Như vậy biến dạng dài tương đối của đoạn dz là: $\varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz}$ (a)

Theo định luật Hooke ta có: $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ (b)

trong đó: E - là hằng số tỷ lệ, được gọi là mô đun đàn hồi khi kéo (nén), nó phụ thuộc vào vật liệu và có thứ nguyên $\left[\frac{\text{lực}}{(\text{chiều dài})^2} \right]$, đơn vị N/m^2 , xác định từ thí nghiệm.

Bảng 3.1 cho trị số E của một số vật liệu.

Vật liệu	E (kN/cm ²)	μ
Thép (0,15 ÷ 0,20)%C	2×10^4	0,25 ÷ 0,33
Thép lò xo	$2,2 \times 10^4$	0,25 ÷ 0,33
Thép niken	$1,9 \times 10^4$	0,25 ÷ 0,33
Gang xám	$1,15 \times 10^4$	0,23 ÷ 0,27
Đồng	$1,2 \times 10^4$	0,31 ÷ 0,34
Đồng thau	$(1,0 \div 1,2)10^4$	0,31 ÷ 0,34
Nhôm	$(0,7 \div 0,8)10^4$	0,32 ÷ 0,36
Gỗ dọc thớ	$(0,08 \div 0,12)10^4$	
Cao su	0,8	0,47

T

Từ (a) tính δdz , thế (b) vào, ta được biến dạng dài dọc trục của đoạn dz là:

$$\delta dz = \varepsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N_z}{EF} dz \quad (c)$$

Suy ra biến dạng dài (dãn khi thanh kéo, co khi thanh nén) của đoạn thanh dài L :

$$\Delta L = \int_L \delta dz = \int_L \frac{N_z}{EF} dz \quad (3.2)$$

Nếu E , F là hằng số và N_z cũng không đổi trên chiều dài L của thanh, ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_z}{EF} \int_L dz = \frac{N_z L}{EF} \quad (3.3)$$

Nếu thanh gồm nhiều đoạn chiều dài L_i và trên mỗi đoạn N_z , E , A không đổi thì:

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_{zi} L_i}{E_i F_i} \quad (3.3')$$

Tích số EF gọi là độ cứng khi chịu kéo hay nén đúng tâm của thanh.

2- Biến dạng ngang

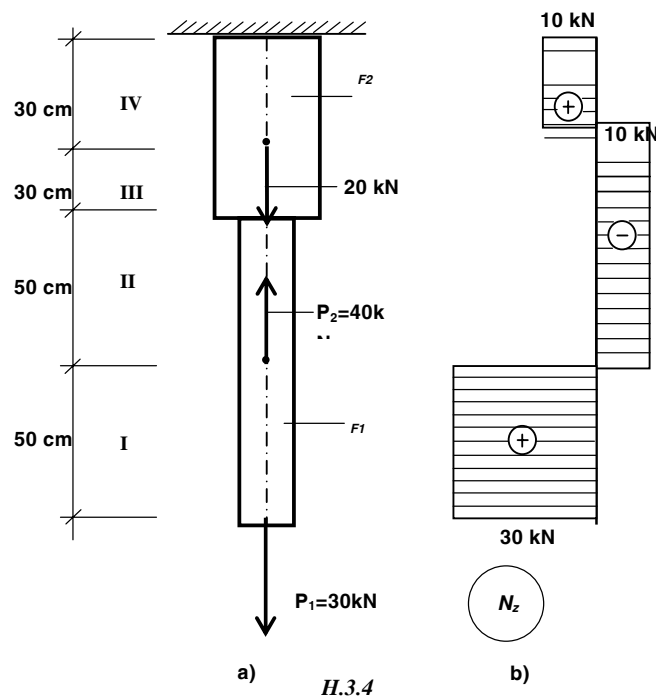
Theo phương ngang thanh cũng có biến dạng, ta đã chọn z là trục thanh, x , y là các phương vuông góc với z (H.3.3d). Nếu ta gọi ε_x và ε_y là biến dạng dài tương đối theo hai phương x và y , thì ta có quan hệ sau:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z \quad (3.4)$$

trong đó: ν - hệ số Poisson, là hằng số vật liệu

Dấu (-) trong biểu thức chỉ rằng biến dạng theo phương dọc và ngang ngược nhau.

Thí dụ 3.1. Vẽ biểu đồ dọc N_z tính ứng suất và biến dạng dài toàn phần của thanh trên H.3.4a cho biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $F_1 = 10 \text{ cm}^2$; $F_2 = 20 \text{ cm}^2$.



Giải. Dùng phương pháp mặt cắt ta dễ dàng vẽ được biểu đồ N_z (H.3.4b)

Từ đó ta tìm được ứng suất trên mặt cắt ngang mỗi đoạn là:

$$\sigma_I = \frac{N_z^I}{F_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{II} = \frac{N_z^{II}}{F_1} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_z^{III}}{F_2} = \frac{-10}{20} = -0,5 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{IV} = \frac{N_z^{IV}}{F_2} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$

Để xác định biến dạng dọc toàn phần chính là biến dạng dài tuyệt đối của thanh ta sử dụng công thức (3.3') áp dụng cho bốn đoạn của thanh.

$$\Delta L = \frac{30 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} = 0,005 \text{ cm}$$

Biến dạng dọc mang dấu + nghĩa là thanh bị dài ra.

Ta có thể tính biến dạng bằng phương pháp cộng tác dụng.

$$\Delta L = \frac{30 \times 100}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{+ 30 \times 60}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{- 40 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{- 40 \times 60}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{20 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} = 0,005 \text{ cm}$$

3.4. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

1. Khái niệm

Vấn đề của chúng ta là cần phải so sánh độ bền, độ cứng của vật liệu khi chịu lực với ứng suất biến dạng của vật liệu cùng loại đã biết. Ta cần thí nghiệm kéo, nén để tìm hiểu tính chất chịu lực và quá trình biến dạng từ lúc bắt đầu chịu lực đến lúc phá hỏng của các loại vật liệu khác nhau.

Người ta phân vật liệu thành hai loại cơ bản: Vật liệu dẻo, vật liệu giòn.

Như vậy có bốn thí nghiệm cơ bản sau:

2. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (thép)

1- Mẫu thí nghiệm

Theo tiêu chuẩn TCVN 197 - 85

(H.3.5)

Chiều dài L_0 thí nghiệm là đoạn thanh

đường kính d_0 , diện tích F_0

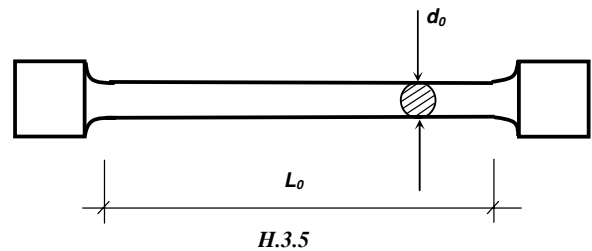
2- Thí nghiệm

Tăng lực kéo từ 0 đến khi mẫu đứt, với bộ phận vẽ biểu đồ của máy kéo, ta nhận được đồ thị quan hệ giữa lực kéo P và biến dạng dài ΔL của mẫu như H.3.6. Ngoài ra sau khi mẫu bị đứt ta chấp mẫu lại, mẫu sẽ có hình dáng như H.3.7.

3- Phân tích kết quả

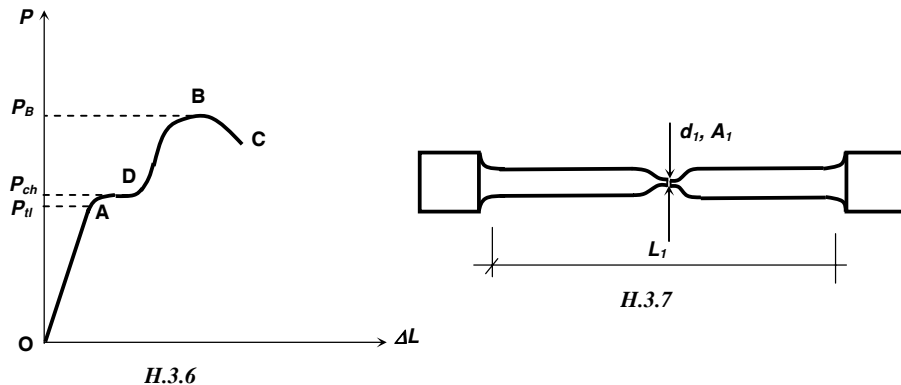
Quá trình chịu lực của vật liệu có thể chia làm ba giai đoạn.

OA: đàn hồi, P và ΔL bậc nhất, Lực lớn nhất là lực tỉ lệ P_{tl} . $\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0}$ (3.5)



AD: giai đoạn chảy, lực kéo không tăng nhưng biến dạng tăng liên tục. Lực kéo tương ứng là lực chảy P_{ch} và ta có giới hạn chảy. $\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_o}$ (3.6)

DBC: giai đoạn củng cố (tái bền), tương quan giữa lực P và biến dạng ΔL là đường cong. Lực lớn nhất là lực bền P_B và ta có giới hạn bền. $\sigma_b = \frac{P_b}{F_o}$ (3.7)



Nếu chiều dài mẫu sau khi đứt (H.3.7) là L_1 và diện tích mặt cắt ngang nơi đứt là A_1 thì ta có các định nghĩa đặc trưng cho tính dẻo của vật liệu như sau:

Biến dạng dài tương đối (tính bằng phần trăm): $\delta = \frac{L_0 - L_1}{L_0} 100\%$ (3.8)

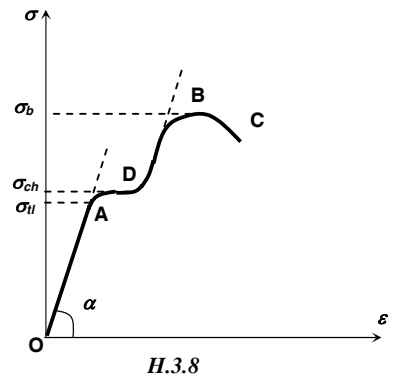
Độ thắt tỷ đối (tính bằng phần trăm): $\psi = \frac{F_o - F_1}{F_o} 100\%$ (3.9)

4- Biểu đồ $\sigma - \varepsilon$ (biểu đồ qui ước)

Từ biểu đồ $P - \Delta L$ ta dễ dàng suy ra biểu đồ tương quan giữa ứng suất $\sigma_z = P/F_o$ và biến dạng dài tương đối $\varepsilon_z = \Delta L/L_o$.

Biểu đồ này có hình dạng giống như biểu đồ $P - \Delta L$ (H.3.8). Trên biểu đồ chỉ rõ σ_{II} , σ_{ch} , σ_b và cả mô đun đàn hồi:

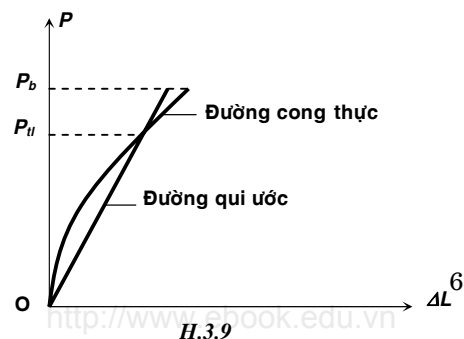
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \tan \alpha$$



Nếu kể đến sự biến đổi diện tích mặt cắt ngang ta sẽ có biểu đồ tương quan giữa ε_z và ứng suất thực (đường nét đứt).

3. Thí nghiệm kéo vật liệu dòn

Biểu đồ kéo vật liệu dòn có dạng đường cong (H.3.9). Vật liệu không có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy mà chỉ có giới hạn bền.

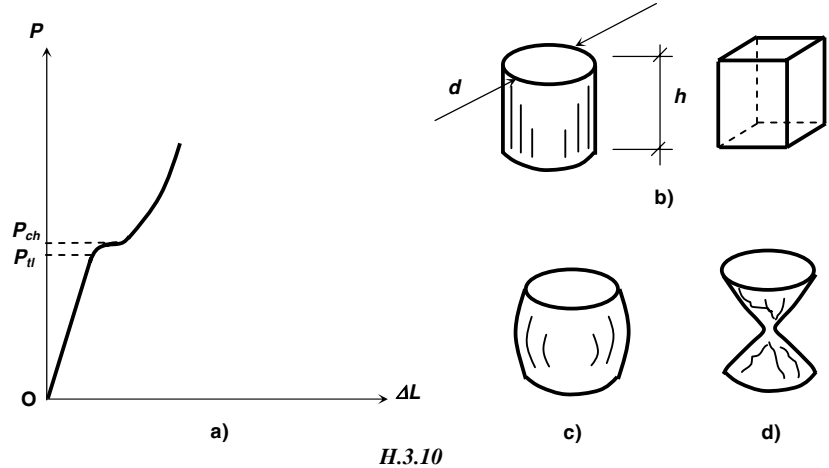


$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_o} \quad (3-10)$$

Tuy vậy người ta cũng qui ước một giới hạn đàn hồi nào đó và xem đồ thị quan hệ lực kéo và biến dạng là đường thẳng (đường qui ước).

4. Nén vật liệu dẻo

Biểu đồ nén vật liệu dẻo như H.3.10a. Ta chỉ xác định được giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy, mà không xác định được giới hạn bền do sự phình ngang của mẫu làm cho diện tích mặt cắt ngang mẫu liên tục tăng lên. Sau thí nghiệm mẫu có dạng hình trống (H.3.10c).



5. Nén vật liệu giòn. Đường cong tương tự biểu đồ kéo vật liệu giòn. P_b .

Nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén các vật liệu dẻo và giòn, người ta thấy rằng: giới hạn chảy của vật liệu dẻo khi kéo và nén như nhau, còn đối với vật liệu giòn giới hạn bền khi kéo bé hơn nhiều so với giới hạn bền khi nén.

3.6. THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI (TNBDDH)

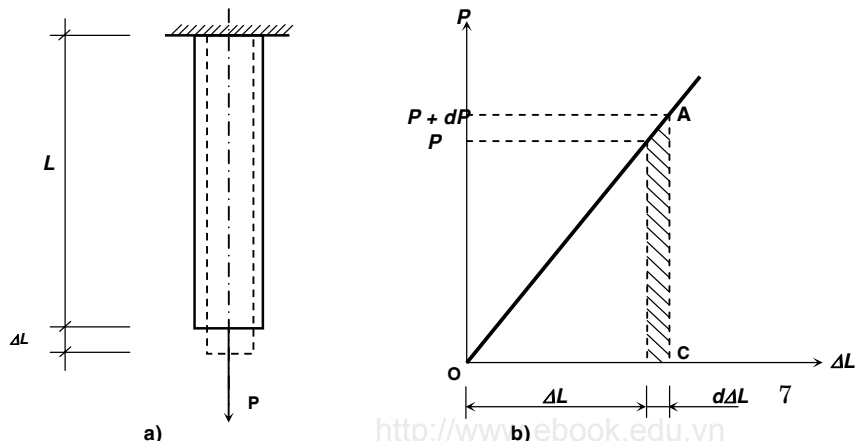
1- Khái niệm

Xét thanh chịu kéo làm việc trong giai đoạn đàn hồi (H.3.13a). Lực tăng dần từ 0 đến giá trị P , thanh dãn ra từ từ đến giá trị ΔL . Bỏ lực, thanh về vị trí ban đầu.

Người ta nói công của W của ngoại lực phát sinh trong quá trình di chuyển đã chuyển hóa thành thể năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong thanh và chính thể năng này làm cho thanh đàn hồi sau khi không tác dụng lực.

2- Tính thể năng biến dạng đàn hồi

P và ΔL biểu diễn như H.3.13b. Công của lực P trên chuyển dời ΔL .



H.3.13

$$dW = (P + dP)d\Delta L = Pd\Delta L + dPd\Delta L = Pd\Delta L$$

Suy ra công của lực kéo P tăng từ 0 đến P được biểu thị bằng diện tích tam giác OAC.

$$W = \frac{P\Delta L}{2}$$

Công này biến thành TNBD ĐH U : $U = W = \frac{P\Delta L}{2} = \frac{P^2 L}{2EF}$ (3.11)

Gọi u là TNBDĐH riêng (thế năng tích lũy trong một đơn vị thể tích), ta có:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} \quad (3.12)$$

Xét đoạn thanh có chiều dài dz có nội lực N_z (H.3.14): $dU = \frac{N_z^2 dz}{2EF}$

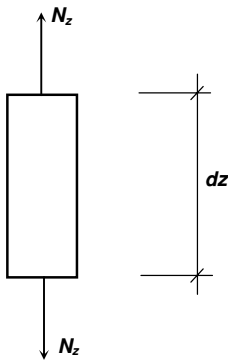
Suy ra thế năng biến dạng đàn hồi của đoạn thanh dài L , có nội lực N_z là:

$$U = \int_L dU = \int_L \frac{N_z^2 dz}{2EF}$$

Khi trong đoạn thanh $\frac{N_z}{EF}$ không đổi ta có: $U = \frac{N_z^2 L}{2EF}$ (3.13)

Với nhiều đoạn dài L_i ta sẽ có: $U = \sum U_i = \sum \frac{N_{zi}^2 L_i}{2E_i F_i}$ (3.13')

Thế năng biến dạng đàn hồi thường dùng để tính chuyển vị của hệ thanh.



H.3.14

Ví dụ 3.2. Xác định chuyển vị đứng của điểm đặt lực. Cho $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; (H.3.15a). Cho $L = 200 \text{ cm}$; $P = 300 \text{ (KN)}$; $\alpha = 30^\circ$; $F = 10 \text{ cm}^2$

Giải

- Xác định nội lực

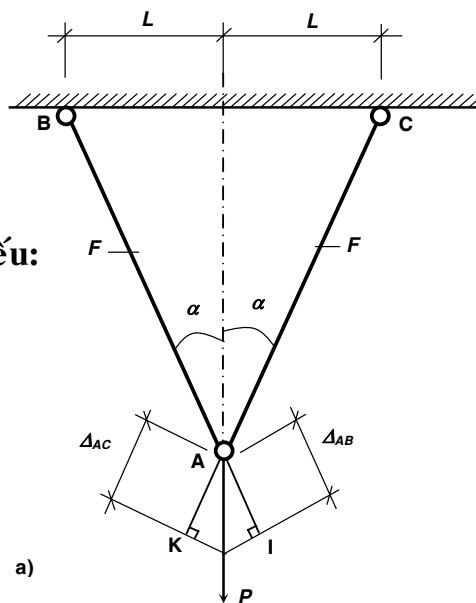
Tách mắt A (H.3.15b).

Dùng hai phương trình hình chiếu:

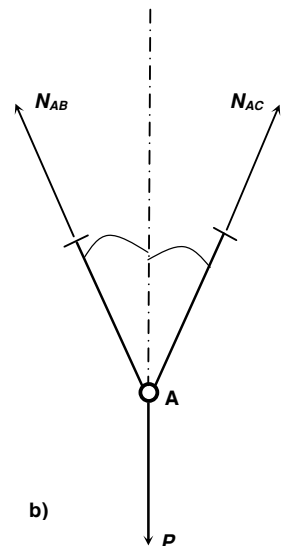
$$\sum X = 0: N_{AB} = N_{AC} = N$$

$$\sum Y = 0: 2N \cos \alpha = P$$

suy ra: $N = \frac{P}{2 \cos \alpha}$



H. 3.15



- Chuyển vị đứng của điểm A

a) Phương pháp dùng cách tính theo biến dạng hình học.

Gọi Δ_{AB} , Δ_{AC} các biến dạng của đoạn AB, AC (H.3.15a).

Từ I, K kẻ hai đường vuông góc với AB và AC, chúng cắt nhau ở A', AA' chính là độ di chuyển của điểm A.

Trường hợp hệ thanh trên vì $N_{AB} = N_{AC}$ nên $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$ và A' nằm trên đường thẳng đứng kẻ từ A, hay AA' chính là chuyển vị cần tìm.

Xét tam giác AIA' ta có:

$$AA' \cos \alpha = AI \quad \text{hay:} \quad AA' = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{\Delta_{AB}}{\cos \alpha}$$

$$AA' = \frac{N_{AB} L_{AB}}{(EF)_{AB} \cos \alpha} = \frac{PL}{2EF \cos^2 \alpha}$$

Với $P = 300 \text{ kN}$, $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $\alpha = 30^\circ$ ta được: $AA' = 0,4 \text{ cm}$

b) Phương pháp dùng thế năng biến dạng đàn hồi

Ta có: $W = U$ (*)

Công ngoại lực:

$$W = \frac{1}{2} P \cdot AA'$$

Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ: $U = \frac{N_{AB}^2 L_{AB}}{2(EF)_{AB}} + \frac{N_{AC}^2 L_{AC}}{2(EF)_{AC}} = 2 \frac{N^2 L}{2EF}$

Thế vào (*) ta được: $\frac{1}{2} P \cdot AA' = 2 \frac{N^2 L}{2EF}$

suy ra: $AA' = \frac{2}{P} \frac{N^2 L}{EF} = \frac{PL}{2EF \cos^2 \alpha} = 0,4 \text{ cm}$

3.7. ỨNG SUẤT CHO PHÉP - HỆ SỐ AN TOÀN - BA BÀI TOÁN CƠ BẢN

Ta gọi ứng suất nguy hiểm, ký hiệu σ_o , là trị số ứng suất mà ứng với nó vật liệu được xem là bị phá hoại. Đối với vật liệu dẻo $\sigma_o = \sigma_{ch}$, đối với vật liệu giòn $\sigma_o = \sigma_b$.

Nhưng khi chế tạo, vật liệu thường không đồng chất hoàn toàn, và trong quá trình sử dụng tải trọng tác dụng có thể vượt quá tải trọng thiết kế, điều kiện làm việc của kết cấu hay chi tiết chưa được xem xét đầy đủ, các giả thiết khi tính toán chưa đúng với sự làm việc của kết cấu. Vì thế ta không tính toán theo σ_o . Chúng ta phải chọn một hệ số an toàn n lớn hơn 1 để xác định ứng suất cho phép.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (3.15)$$

Và dùng trị số $[\sigma]$ để tính toán.

Hệ số an toàn do nhà nước hay hội đồng kỹ thuật của nhà máy qui định.

Để chọn hệ số an toàn được chính xác, nhiều khi người ta phải chọn nhiều hệ số theo riêng từng nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của công trình hay chi tiết máy, có thể kể đến:

- Hệ số kể đến độ đồng chất của vật liệu
- Hệ số kể đến sự vượt quá tải trọng thiết kế
- Hệ số kể đến sự làm việc tạm thời hay lâu dài

Như vậy muốn đảm bảo sự làm việc an toàn về độ bền khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn *điều kiện bền* là:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (3.16)$$

Từ điều kiện bền, ta có ba bài toán cơ bản:

Kiểm tra bền: $\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \pm 5\%$

Chọn kích thước mặt cắt ngang: $F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \pm 5\%$

Định tải trọng cho phép: $N_z \leq [\sigma]F \pm 5\% \quad \text{hay:} \quad [N_z] = [\sigma]F$

Thí dụ 3.4. Cho hệ như H.3.17a. Định tải trọng cho phép $[P]$ theo điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3. Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $F_1 = 2 \text{ cm}^2$, $F_2 = 1 \text{ cm}^2$, $F_3 = 2 \text{ cm}^2$.

Giải. Trước tiên ta cần tính nội lực trong các thanh. Cô lập hệ như H.3.17b.

Xét cân bằng với các phương trình:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_2 \cos 45^\circ + N_3 = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -P + N_1 + N_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -P2a + N_1a = 0$$

Ta được $N_1 = 2P$, $N_2 = -P\sqrt{2}$ (nén), $N_3 = P$

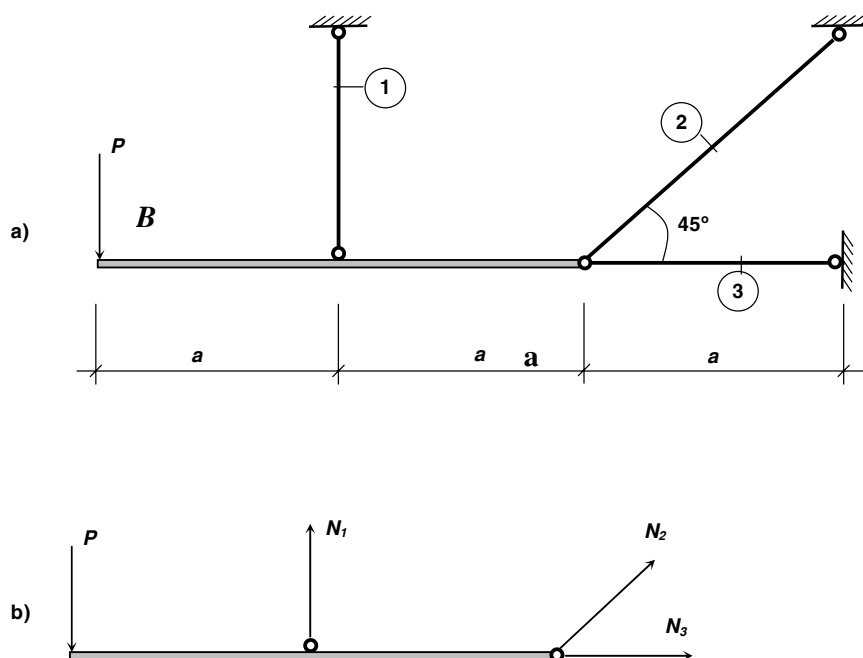
Viết điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2P}{F_1} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma]F_1}{2} = \frac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ kN}$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{F_2} = \frac{P\sqrt{2}}{F_2} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma]F_2}{\sqrt{2}} = \frac{16 \cdot 1}{\sqrt{2}} = 11,3 \text{ kN}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{P}{F_3} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq [\sigma] F_3 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ kN}$$

So sánh ta được $[P] = 11,3 \text{ kN}$.



H. 3.17

3.8. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Định nghĩa: *Bài toán siêu tĩnh là bài toán mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học sẽ không đủ để giải được tất cả các phản lực hay nội lực trong hệ.*

Cách giải. Cần tìm thêm các phương trình diễn tả điều kiện biến dạng của hệ sao cho cộng số phương trình này với các phương trình cân bằng tĩnh học vừa đủ bằng số ẩn số phản lực, nội lực cần tìm.

Thí dụ 3.5. Xét thanh chịu lực như H.3.18a. Ở hai ngàm có hai phản lực V_A và V_B . Ta có phương trình cân bằng: $V_A + V_B - P = 0$ (a)

Phương trình này có hai ẩn, muốn giải được ta phải tìm thêm phương trình điều kiện biến dạng của thanh.

Tưởng tượng bỏ ngàm B và thay bằng phản lực V_B (H.3.18b). Điều kiện biến dạng của hệ là: $\Delta L = \Delta_{BA} = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$ (b)

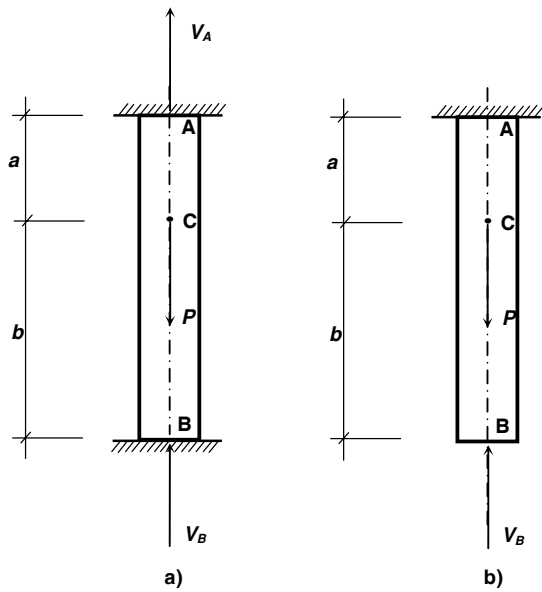
Gọi N_{BC} và N_{CA} là nội lực trên các mặt cắt của các đoạn BC và CA ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_{BC}L_{BC}}{EF} + \frac{N_{CA}L_{CA}}{EF} = 0 \quad (c)$$

với $N_{BC} = -V_B$; $N_{CA} = -V_B + P$, (c) trở thành: $\frac{-V_B b}{EF} + \frac{(-V_B + P)a}{EF} = 0$

suy ra: $V_B = \frac{Pa}{a+b}$

Ta đã tính được phản lực V_B , bài toán trở thành bài toán tĩnh định bình thường



H.3.18

Thí dụ 3.6. Xét hệ gồm ba thanh treo lực P (H.3.19a) hãy tính nội lực trong các thanh treo.

Giải. Ta có hai phương trình cân bằng (tách nút A):

$$\sum X = N_{AB} \sin \alpha + N_{AD} \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum Y = -P + N_{AB} \cos \alpha + N_{AC} + N_{AD} \cos \alpha = 0 \quad (b)$$

Để giải ba ẩn số nội lực ta cần thêm một phương trình điều kiện biến dạng. Xét hệ thanh sau khi chịu lực. Vì đối xứng nên điểm A di chuyển theo phương AC đến A'. Từ A kẻ đường AI và AK lần lượt vuông góc với A'B và A'D. Biến dạng nhỏ nên góc A'BA và A'DA vô cùng bé và góc BA'C và DA'C vẫn α . Suy ra IA' là độ giãn dài của AB và tương tự KA' là độ giãn dài của AD.

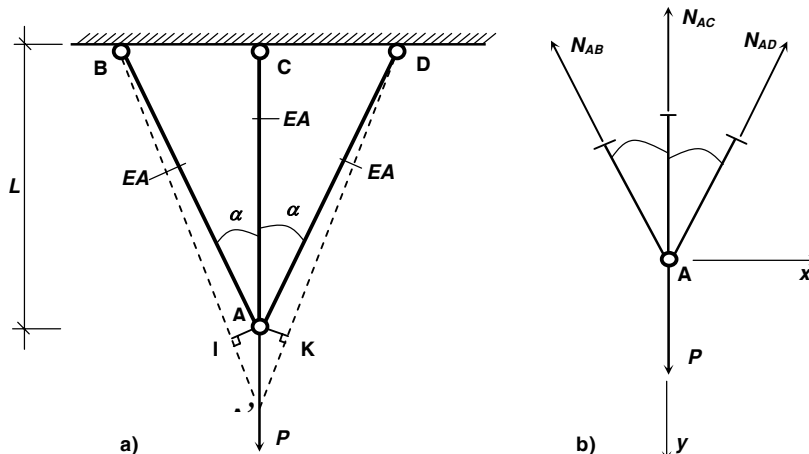
Ngoài ra AA' cũng chính là độ giãn dài của AC

Xét tam giác A'IA và A'KA ta có liên hệ:

$$IA' = KA' = AA' \cos \alpha \quad (c)$$

Thay $IA' = \frac{N_{AB}L}{EF \cos \alpha}$; $KA' = \frac{N_{AD}L}{EF \cos \alpha}$; $AA' = \frac{N_{AC}L}{EF}$ vào (c) rồi vào (a) và (b) ta

$$\text{sẽ được } N_{AB} = N_{AD} = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} ; N_{AC} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$



H.3.19

Thí dụ 3.7. Cho thanh ABC tuyệt đối cứng liên kết khớp tại A được treo bởi dây CD có tiết diện F và có chiều dài L như hình vẽ.

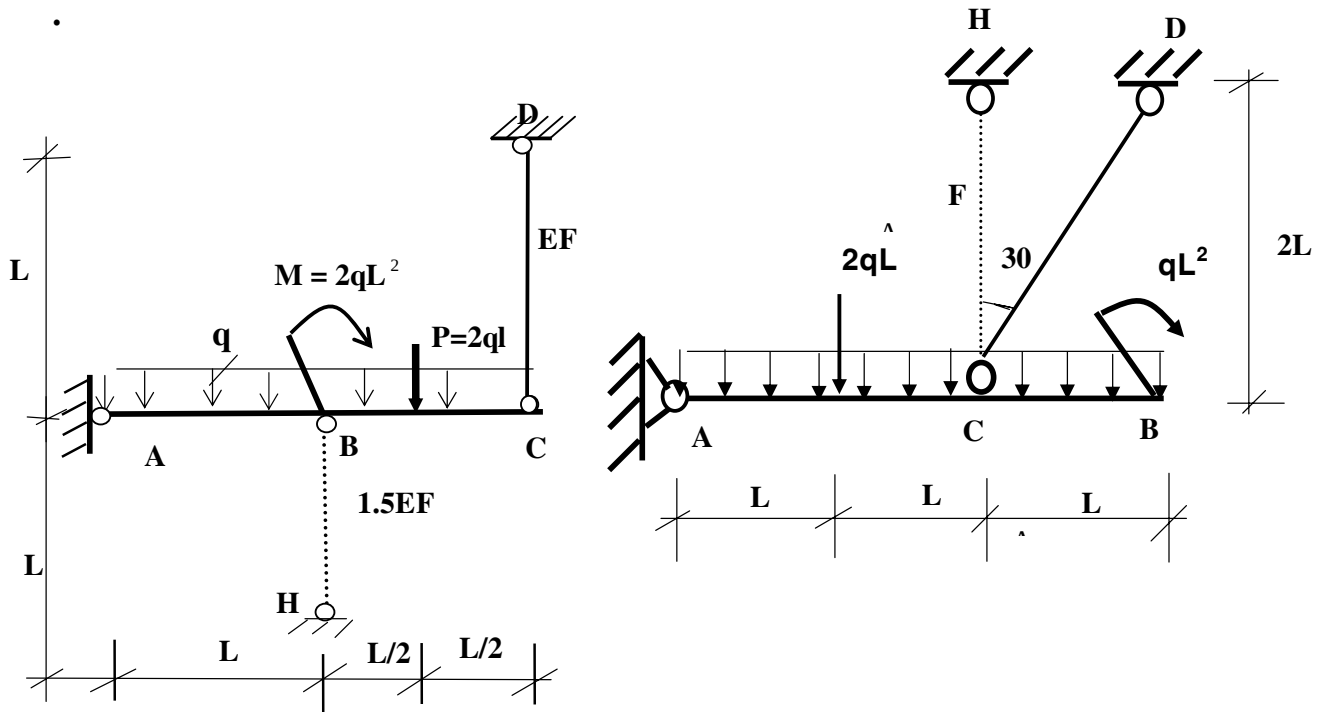
1/ Tính nội lực của CD.

2/ Tính $[q]$ theo điều kiện bền của thanh CD .

Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $L=2\text{m}$ $F= 2 \text{ cm}^2$.

3/ Tính chuyển vị đứng của điểm C . Cho $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$

4/ Bây giờ thêm thanh chống BH hay thanh treo CH (nét chấm) . Tính lại nội lực của các thanh chống CD và BH



Cho $q=10\text{kN/m}$, $L = 1\text{m}$, $F = 1.5\text{cm}^2$, $E=20000\text{kN/cm}^2$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$

-Kiểm tra bền thanh CD.

-Tính chuyển vị đứng của điểm C

Chương 4

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

4.1 NHỮNG KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT.

4.1.1 TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT (TTUS) TẠI MỘT ĐIỂM.

Xét một điểm K trong một vật thể cân bằng và các mặt cắt qua K, trên các mặt cắt ấy có các ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ . Các ứng suất này thay đổi tùy vị trí mặt cắt (H.4.1).

Định nghĩa TTUS: TTUS tại một điểm là tập hợp tất cả những ứng suất trên các mặt đi qua điểm ấy.

TTUS tại một điểm đặc trưng cho mức độ chịu lực của vật thể tại điểm đó. Nghiên cứu TTUS là tìm đặc điểm và liên hệ giữa các ứng suất σ , τ , xác định ứng suất lớn nhất, nhỏ nhất để tính toán độ bền hay giải thích, đoán biết dạng phá hỏng của vật thể chịu lực.

4.1.2 Biểu diễn TTUS tại một điểm

Tưởng tượng tách một phân tử hình hộp vô cùng bé bao quanh điểm K. Các mặt phân tử song song với các trục tọa độ (H.4.2).

Trên các mặt của phân tử sẽ có chín thành phần ứng suất:

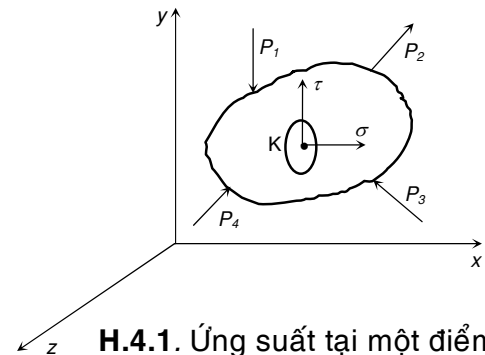
+Ba ứng suất pháp: σ_x , σ_y , σ_z

+Sáu ứng suất tiếp. τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} ,

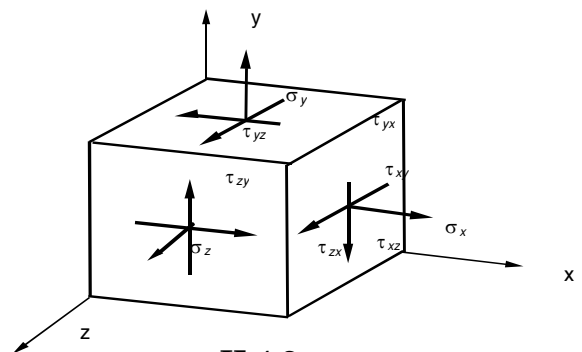
τ_{yz} , τ_{zy} ,

Ứng suất pháp σ có 1 chỉ số chỉ phương pháp tuyến mặt có σ .

Ứng suất tiếp τ có hai chỉ số: Chỉ số thứ nhất chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt có τ , chỉ số thứ hai chỉ phương của τ .



H.4.1. Ứng suất tại một điểm



H.4.2

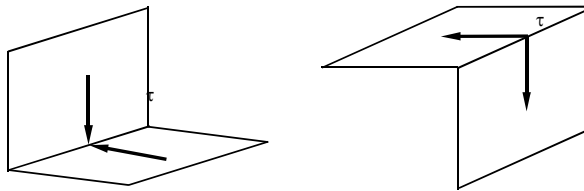
Các thành phần ứng suất

4.1.3 Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

Trên hai mặt vuông góc, nếu mặt này có ứng suất tiếp hướng vào cạnh (hướng ra khỏi cạnh) thì mặt kia cũng có ứng suất tiếp hướng vào cạnh (hướng ra khỏi cạnh), trị số hai ứng suất bằng nhau (H.4.3)

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|; |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|; |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}| \quad (4.1)$$

TTÚS tại một điểm còn 6 thành phần ứng suất



4.1.4 Mặt chính, phương chính và ứng suất chính. Phân loại TTÚS

Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng tại một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực luôn tìm được một phân tố hình hộp vuông góc mà trên các mặt của phân tố đó chỉ có ứng suất pháp, mà không có ứng suất tiếp (H4.4a).

Những mặt đó gọi là **mặt chính**.

Pháp tuyến của mặt chính gọi là **phương chính**.

Ứng suất pháp trên mặt chính gọi là **ứng suất chính** và ký hiệu là:

σ_1, σ_2 và σ_3 . Quy ước: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Thí dụ :

$$\sigma_1 = 200 \text{ N/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = -400 \text{ N/cm}^2;$$

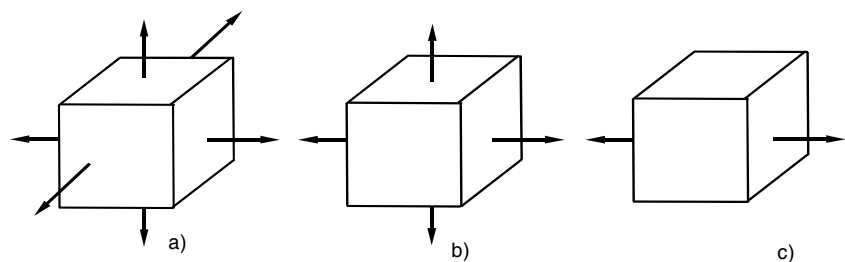
$$\sigma_3 = -500 \text{ N/cm}^2$$

Phân loại TTÚS :

- **TTÚS khối** : Ba ứng suất chính khác không (H.4.4a).

- **TTÚS phẳng**: Hai ứng suất chính khác không (H.4.4b).

- **TTÚS đơn**: Một ứng suất chính khác không (H.4.4c).



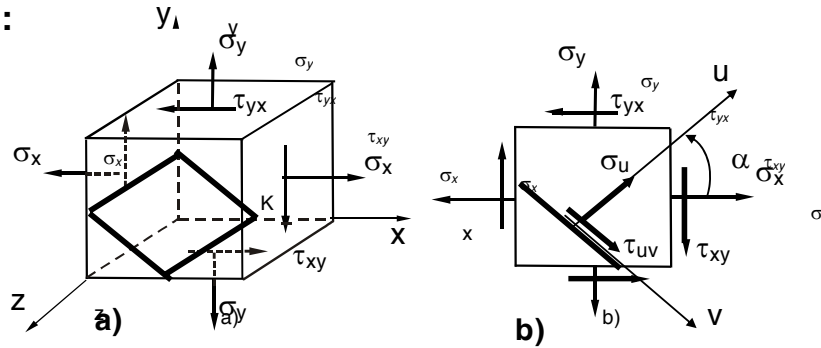
H. 4.4 Các loại trạng thái ứng suất

TTÚS khối và TTÚS phẳng gọi là **TTÚS phức tạp**.

4.2 TTÚS TRONG BÀI TOÁN PHẪNG- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH.

4.2.1 Cách biểu diễn – Quy ước dấu

Cách biểu diễn:



H. 4.5 TTÚS trong bài toán phẳng

Xét một phân tố (H.4.5a). Ứng suất trên **mặt vuông góc với trục z bằng không** và mặt này là một mặt chính vì có ứng suất tiếp bằng không.

Để dễ hình dung, ta biểu diễn phân tố đang xét bằng hình chiếu của toàn phân tố lên mặt phẳng Kxy (H.4.5b).

Quy ước dấu: + $\sigma > 0$ khi gây kéo (hướng ra ngoài mặt cắt)

+ $\tau > 0$ khi làm cho phân tố quay thuận kim đồng hồ

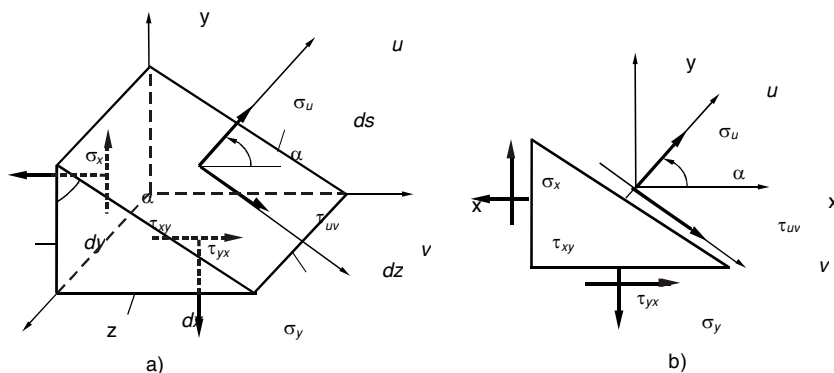
Hình 4.5b biểu diễn các ứng suất > 0

(qui ước này phù hợp với bài toán thanh)

4.2.2 Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ

Vấn đề: Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng song song với trục z và có pháp tuyến u tạo với trục x một góc α ($\alpha > 0$ khi quay ngược chiều kim đồng hồ kể từ trục x) (H.4.6a). Giả thiết đã biết ứng suất σ_x , σ_y và τ_{xy} .

♦ **Tính σ_u và τ_{uv}** : Tưởng tượng cắt phân tố bằng mặt cắt nghiêng đã nêu, mặt cắt chia phân tố ra làm hai phần, xét cân bằng của một phần phân tố (H.4.6b)

**H.4.6** Ứng suất trên mặt nghiêng

Trên mặt nghiêng có ứng suất σ_u và τ_{uv} , chúng được xác định từ phương trình cân bằng tĩnh học.

$$* \sum U=0 \Rightarrow \sigma_u ds dz - \sigma_x dz dy \cos \alpha + \tau_{xy} dz dy \sin \alpha - \sigma_y dz dx \sin \alpha + \tau_{yx} dz dx \cos \alpha = 0$$

$$* \sum V=0 \Rightarrow \tau_{uv} ds dz - \sigma_x dz dy \sin \alpha - \tau_{xy} dz dy \cos \alpha + \sigma_y dz dx \cos \alpha + \tau_{yx} dz dx \sin \alpha = 0$$

$$\text{Kể đến: } |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|; dx = ds \sin \alpha; dy = ds \cos \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.2a)$$

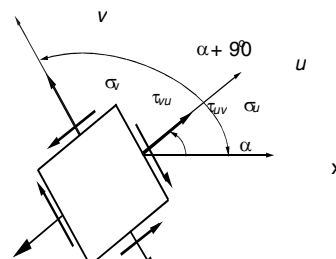
$$\tau_{uv} = + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.2b)$$

♦ **Tính σ_v** : Xét mặt nghiêng có pháp tuyến v , vuông góc mặt có pháp tuyến u (H.4.7). Thay thế α bằng $(\alpha + 90^\circ)$ vào (4.2a),

$\Rightarrow$ ứng suất pháp tác dụng trên mặt có pháp tuyến v :

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.3)$$

Tổng (4.2a) và (4.3), $\Rightarrow$

**H. 4.7** Ứng suất trên 2 mặt vuông góc nhau

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \quad (4.4)$$

Biểu thức trên cho thấy, tổng ứng suất pháp tác dụng trên hai mặt vuông góc của phân tố ứng suất phẳng tại một điểm là hằng số và không phụ thuộc vào góc α .

Đó là **Bất Biến Thứ Nhất** của ứng suất pháp

Thí dụ 4.1 Thanh có diện tích 5 cm^2 , chịu kéo với lực $P = 40 \text{ kN}$. Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng một góc 30° với mặt cắt ngang (H.4.8).

Giải

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang (Chương 3)

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{40}{5} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

Tách phân tố hình hộp bao điểm K nằm trên mặt cắt ngang.

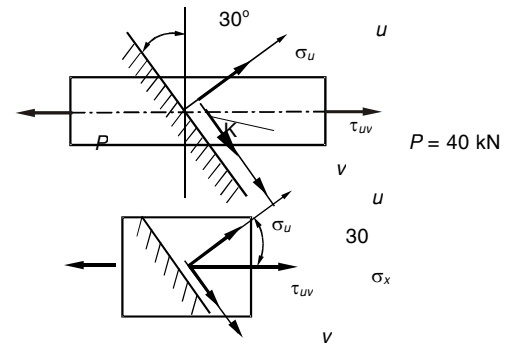
$$\text{Ta có: } \sigma_x = +8 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 0$$

Mặt cắt nghiêng có pháp tuyến hợp với trục x (trục thanh) một góc $(+30^\circ)$.

Từ (4.2) $\Rightarrow$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{8}{2} (1 + \cos 2.30^\circ) = 6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{uv} = + \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = + \frac{8}{2} \sin 2.30^\circ = +3,46 \text{ kN/cm}^2$$



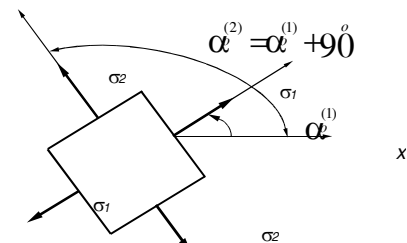
H.4.8

4.2.3 Ứng suất chính - Phương chính - Ứng suất pháp cực trị

1- Ứng suất chính - phương chính

Ngoài mặt chính là mặt đã biết vuông góc với trục z , hai mặt chính còn lại là những mặt song song với trục z (vì phải vuông góc với mặt chính đã có).

Mặt chính là mặt có ứng suất tiếp $= 0 \Rightarrow$ Tìm hai mặt chính còn lại bằng cách cho $\tau_{uv} = 0$



H. 4.9 Ứng suất chính

Nếu gọi α_o là góc của trục x hợp với phương chính thì điều kiện để tìm phương chính là: $\tau_{uv} = 0 \Leftrightarrow + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$

$$\Rightarrow \text{Phương trình xác định } \alpha_o : \tan 2\alpha_o = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan \beta \quad (4.5)$$

$$\alpha_o = \frac{\beta}{2} \pm k \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_{o1} = \frac{\beta}{2} \quad \text{và} \quad \alpha_{o2} = \frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$$

(4.5) cho thấy có hai giá trị α_o sai biệt nhau 90° . Vì vậy, có **hai mặt chính vuông góc với nhau** và song song với trục z. Trên mỗi mặt chính có một ứng suất chính tác dụng.

Hai **ứng suất chính này cũng là ứng suất pháp cực trị** (ký hiệu là $\sigma_{\max}$ hay $\sigma_{\min}$) bởi vì

$$\frac{d\sigma_u}{dz} = 0 \Leftrightarrow \tan 2\alpha = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{giống với (4.5)}$$

Giá trị **ứng suất chính** hay **ứng suất pháp cực trị** có thể tính được bằng cách thế ngược trị số của α trong (4.5) vào (4.2a).

$$\text{Để ý rằng: } \sin 2\alpha_o = \pm \frac{\tan 2\alpha_o}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}}; \quad \cos 2\alpha_o = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max/\min} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.6)$$

$$\text{Ta lại thấy } \sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y$$

Thí dụ 4.2 Tìm ứng suất chính và phương chính của TTUS (H.4.10a). Đơn vị của ứng suất là kN/cm^2 .

Giải

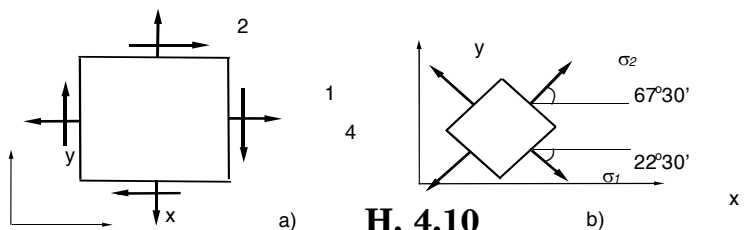
Theo quy ước dấu, ta có:

$$\sigma_x = 4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 2 \text{ kN/cm}^2 \quad \tau_{xy} = +1 \text{ kN/cm}^2$$

Phương chính xác định từ (4.5):

$$\tan 2\alpha_o = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2}{4-2} = -1 \Rightarrow 2\alpha_o = -45^\circ + k180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'; \quad \alpha_o^{(2)} = 67^\circ 30' \quad (i)$$



H. 4.10

Có 2 phương chính (2 mặt chính) vuông góc nhau

Các ứng suất chính được xác định từ (4.6):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + 1} = 3 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 4,41 \text{ kN/cm}^2 \\ 1,58 \text{ kN/cm}^2 \end{cases} \quad (\text{ii})$$

Để xác định mặt chính nào từ (i) có ứng suất chính (ii) tác dụng, ta dùng (4.2b), chẳng hạn với $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$, ta có:

$$\sigma_u = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos 2(-22^\circ 30') - 1 \sin 2(-22^\circ 30') = 4,41 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy : $\sigma_1 = 4,41 \text{ kN/cm}^2$ ứng với góc nghiêng $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$,

$\sigma_2 = 1,58 \text{ kN/cm}^2$ tác dụng trên mặt có $\alpha_o^{(2)} = -67^\circ 30'$.

Các mặt và ứng suất chính biểu diễn trên phân tố ở H.4.10b.

2- Ứng suất tiếp cực trị

Tìm ứng suất tiếp cực trị và mặt nghiêng trên đó có ứng suất tiếp cực trị bằng cách cho $\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 0$

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \quad (4.7)$$

$$\text{So sánh (4.7) với (4.5)} \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{1}{\tan 2\alpha_o}$$

(4.8)

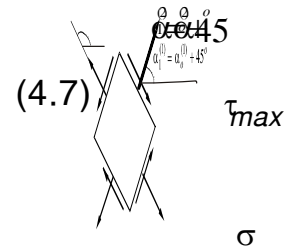
$$\Rightarrow 2\alpha = 2\alpha_o \pm k90^\circ \text{ hay}$$

$$\alpha = \alpha_o \pm k45^\circ \Rightarrow$$

Mặt có ứng suất tiếp cực trị hợp với những mặt chính một góc 45° .

Thế (4.8) vào (4.2b), ta được :

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.9)$$



H. Ứng suất tiếp cực trị

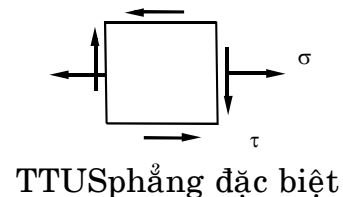
4.2.4 Các trường hợp đặc biệt

1- TTUS phẳng đặc biệt

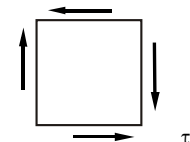
Phân tố trên H.4.12 có: $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$

Từ (4.6)

$\Rightarrow$



H.4.12



H. 4.13 TTUS Trượt thuần túy

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.10)$$

Phân tố có 2 ứng suất chính (sẽ gặp ở trường hợp thanh chịu uốn).

2- TTÚS trượt thuần túy (H.4.13)

Ở đây, $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$; Thay vào (4.6)

$$\Rightarrow \sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,3} = \pm \tau \quad \text{hay} \quad \sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad (4.11)$$

Hai phương chính được xác định theo (4.5):

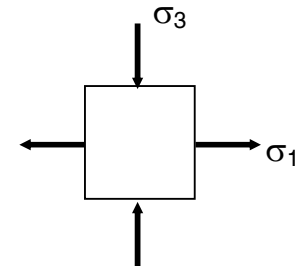
$$\tan 2\alpha_o = \infty \Leftrightarrow \alpha_o = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (4.12)$$

Những phương chính xiên góc 45° với trục x và y .

3- Trường hợp phân tố chính (H.4.14)

Phân tố chính chỉ có $\sigma_1, \sigma_3, \tau = 0$;

$$\text{Thay vào (4.9), ta được: } \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.13)$$



H. 4.14

4.3 TTÚS TRONG BÀI TOÁN PHẪNG- PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ.

1- Vòng tròn Mohr ứng suất.

Công thức xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng (4.2) có thể biểu diễn dưới dạng hình học bằng vòng tròn Mohr. Để vẽ vòng tròn Mohr, ta sắp xếp lại (4.2) như sau:

$$\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.14)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.14)'$$

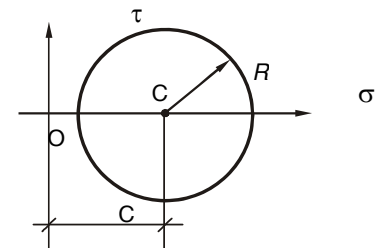
Bình phương cả hai vế của hai đẳng thức trên rồi cộng lại, ta được:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.15)$$

$$\text{Đặt: } c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.16)$$

$$(4.15) \text{ thành: } (\sigma_u - c)^2 + \tau_{uv}^2 = R^2 \quad (4.17)$$

Trong hệ trục tọa độ, với trục hoành σ và trục tung τ , (4.17) là phương trình của một đường tròn có tâm nằm trên trục hoành với hoành độ là c và có bán kính R . Như vậy, các giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên tất cả các mặt song song với



H. 4.15 Vòng tròn ứng suất

trục z của phân tố đều biểu thị bằng tọa độ những điểm trên vòng tròn. Ta gọi vòng tròn biểu thị TTUS của phân tố là **vòng tròn ứng suất** hay **vòng tròn Mohr ứng suất** của phân tố.

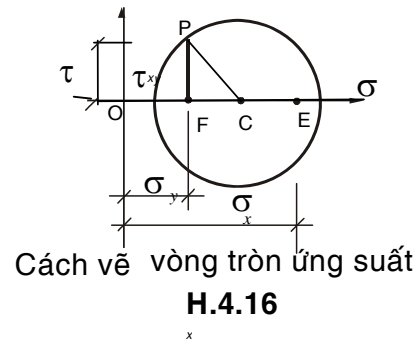
Cách vẽ vòng tròn: (H.4.16)

- Định hệ trục tọa độ $\sigma\tau$: trục hoành σ // trục x , trục tung τ // trục y của phân tố và hướng lên trên.

- Trên trục σ định điểm $E(\sigma_x, 0)$ và điểm $F(\sigma_y, 0)$
 Tâm C là trung điểm của EF

- Định **điểm cực** $P(\sigma_y, \tau_{xy})$.

- Vòng tròn tâm C , qua P là **vòng tròn Mohr** cần vẽ

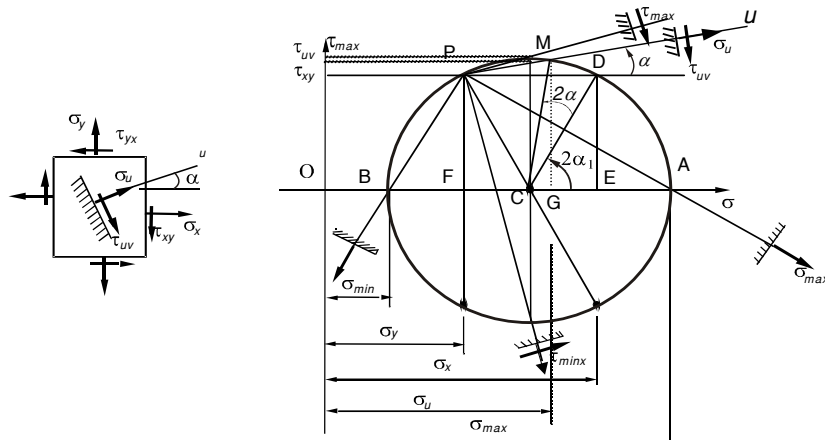


Chứng minh: + C là trung điểm của $EF \Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{OE} + \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = c$

Trong tam giác vuông CPF : $\overline{FC} = \frac{\overline{OE} - \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$; $\overline{FP} = \tau_{xy}$

$$\text{Do đó } \Rightarrow \overline{CP}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FP}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

2- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng



H. 4.17 Định ứng suất trên mặt nghiêng

Dùng vòng tròn Mohr để tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng của phần tử có pháp tuyến u hợp với trục x một góc α .

Cách tìm σ_u ; τ_{uv}

Vẽ vòng tròn Mohr như H.4.17.

Từ cực P vẽ tia Pu // với phương u cắt vòng tròn tại điểm M.

Hoành độ của M = σ_u ; Tung độ của M = τ_{uv}

Chứng minh:

Ký hiệu $2\alpha_1$ là góc (CA,CD), 2α là góc (CD,CM).

Hình 4.17 cho:

$$\begin{aligned}\overline{OG} &= \overline{OC} + \overline{CG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos(2\alpha_1 + 2\alpha) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha - R \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha\end{aligned}$$

nhưng: $R \cos 2\alpha_1 = \overline{CE} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$; $R \sin 2\alpha_1 = \overline{ED} = \tau_{xy}$

nên: $\overline{OG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_u$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}\overline{GM} &= R \sin(2\alpha_1 + 2\alpha) = R \cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha + R \sin 2\alpha_1 \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{uv}\end{aligned}$$

Ta nhận lại được phương trình (4.2)

3- Định ứng suất chính- phương chính- Ứng suất pháp cực trị

Trên vòng tròn ứng suất (H.4.17)

Điểm A có hoành độ lớn nhất, tung độ = 0 $\Rightarrow \sigma_{\max} = OA$; $\tau = 0$

Tia PA biểu diễn một phương chính.

Điểm B có hoành độ nhỏ nhất, tung độ = 0 $\Rightarrow \sigma_{\min} = OB$; $\tau = 0$

Tia PB biểu diễn phương chính thứ hai.

4- Định ứng suất tiếp cực trị

Trên vòng tròn (H.4.17): hai điểm I và J là những điểm có tung độ τ lớn và nhỏ nhất. Do đó, tia PI và PJ xác định pháp tuyến của những mặt trên đó có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu. Những mặt này tạo với những mặt chính một góc 45° .

Ứng suất tiếp cực trị có trị số bằng bán kính đường tròn.

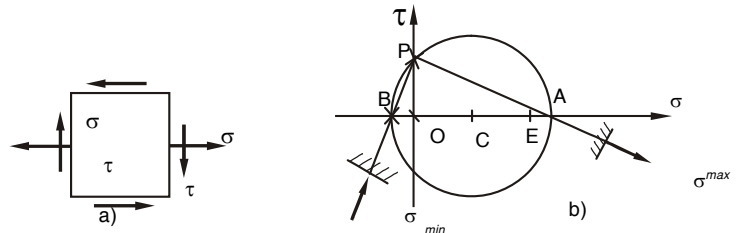
Ứng suất pháp trên mặt có ứng suất tiếp cực trị có giá trị bằng hoành độ điểm C, tức là giá trị trung bình của ứng suất pháp:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

5- Các trường hợp đặc biệt

- TTÚS phẳng đặc biệt

Phân tố có hai ứng suất chính σ_1 và σ_3 (H.4.18).



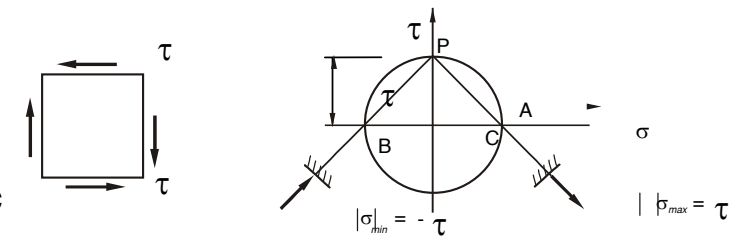
H. 4.18 TTÚS phẳng đặc biệt và vòng Morh

- TTÚS trượt thuần túy

Phân tố có 2 ứng suất chính:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$$

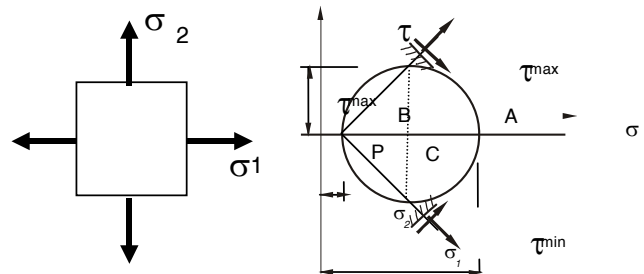
Các phương chính xiên góc 45° với trục x và y (H.4.19)



H. 4.19 TTÚS trượt thuần túy và vòng Morh

- TTÚS chính (H.4.20)

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

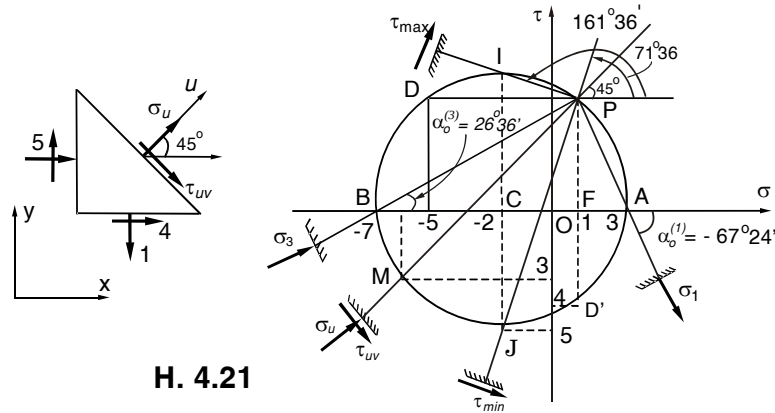


H. 4.20 TTÚS CHÍNH- Vòng Morh

Thí dụ 4.3 Phân tố ở TTÚS phẳng (H.4.21), các ứng suất tính theo

kN/cm^2 . Dùng vòng tròn Mohr, xác định:

- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng $\alpha = 45^\circ$
- Ứng suất chính và phương chính
- Ứng suất tiếp cực trị.



H. 4.21

Giải.

Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 1 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{xy} = +4 \text{ kN/cm}^2$$

♦ Tâm vòng tròn ở $C\left(\frac{-5+1}{2}, 0\right)$.

♦ Cục P(1, + 4). Từ P vẽ tia song song với trục u cắt vòng tròn Mohr tại M. Tọa độ điểm M biểu thị ứng suất trên mặt cắt nghiêng với $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_u = -6 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{uv} = -3 \text{ kN/cm}^2$$

♦ Hoành độ A và B biểu thị ứng suất chính có giá trị bằng:

$$\sigma_1 = \sigma_A = 3 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_3 = \sigma_B = -7 \text{ kN/cm}^2$$

Hai phương chính xác định bởi góc α_o :

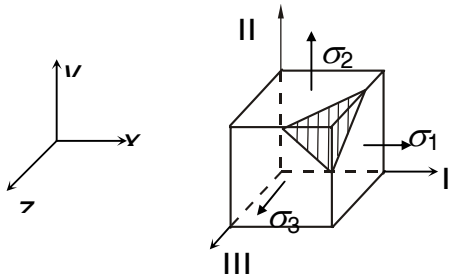
$$\alpha_o^{(1)} = -67^\circ 42'; \quad \alpha_o^{(3)} = 26^\circ 36'$$

♦ Tung độ I và J có giá trị bằng ứng suất tiếp cực trị:

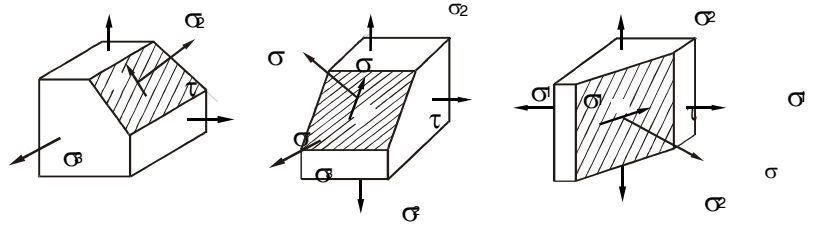
$$\tau_{\max} = 5 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{\min} = -5 \text{ kN/cm}^2$$

Các ứng suất này tác dụng lên các mặt, tương ứng với các góc nghiêng: $\alpha_1^{(1)} = 71^\circ 36'; \quad \alpha_1^{(2)} = 161^\circ 36'$

4.3 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC TTÚS KHỐI



H.4.22. TTÚS khối với mặt cắt nghiêng bất kỳ



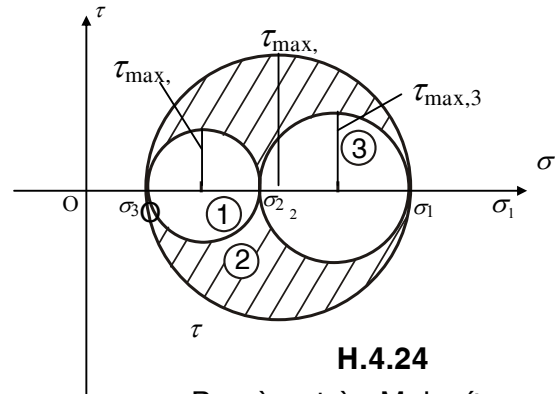
H. 4.23 TTÚS khối và các mặt // trục chính

♦ Tổng quát, TTÚS tại một điểm là TTÚS khối (H.4.22).

♦ Xét những mặt // một phương chính (thí dụ phương III) , ứng suất chính σ_3 không ảnh hưởng đến σ , τ trên các mặt này (H.4.23). $\Rightarrow$ có thể nghiên cứu ứng suất trên những mặt này tương tự TTÚS phẳng.

Vẽ vòng tròn ứng suất biểu diễn các ứng suất trên mặt nghiêng này (vòng tròn số 3 trên H.4.24) .

Từ vòng tròn này, ta thấy trên những mặt song song với phương chính III có mặt có ứng suất tiếp cực đại (ký hiệu $\tau_{\max,3}$), $\tau_{\max,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



H.4.24

Ba vòng tròn Mohr ứng suất

♦ Tương tự, đối với những mặt song song với phương chính thứ I và thứ II, ta cũng vẽ được các vòng tròn ứng suất (Vòng tròn số 1 và vòng tròn số 2) (H.4.24).

♦ Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng giá trị của σ và τ trên một mặt bất kỳ của một phân tố trong TTÚS khối có thể biểu thị bằng tọa độ của một điểm nằm trong miền gạch chéo (H.4.24) .

♦ Qua hình vẽ, ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố biểu thị bằng bán kính của vòng tròn lớn nhất, (H.4.24).

$$\tau_{\max,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (18)$$

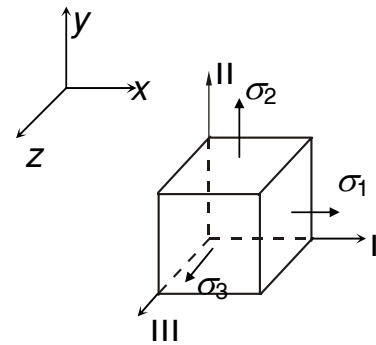
4.4 LIÊN HỆ ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

4.4.1 Định luật Hooke tổng quát

1- Liên hệ ứng suất pháp và biến dạng dài

♦ **TTUS đơn:** trong chương 3, đã có:

Định luật Hooke liên hệ giữa ứng suất pháp và biến dạng dài : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (4.19)



H.4.25. TTUS khối

ε - biến dạng dài tương đối theo phương σ .

Theo phương vuông góc với σ cũng có biến dạng dài tương đối ε' ngược dấu với ε : $\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$ (4.20)

♦ **TTUS khối:** với các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ theo ba phương chính I, II, III (H.4.25). **Tìm biến dạng dài tương đối ε_I theo phương I.**

Biến dạng dài theo phương I do σ_1 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_2 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_2) = -\mu\frac{\sigma_2}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_3 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_3) = -\mu\frac{\sigma_3}{E}$

Biến dạng dài tương đối theo phương I do cả ba ứng suất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sinh ra sẽ là tổng của ba biến dạng trên:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (4.21)$$

Tương tự, biến dạng dài tương đối theo hai phương chính II, III còn lại:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 - \sigma_1)] \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (4.23)$$

♦ **TTUS tổng quát:** Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh đối với vật liệu đàn hồi đẳng hướng, σ chỉ sinh ra biến dạng dài mà không sinh ra biến dạng góc, τ chỉ sinh ra biến dạng góc mà không sinh ra biến dạng dài.

⇒ Trong trường hợp phân tố ở TTUS tổng quát, vẫn có

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4.24)$$

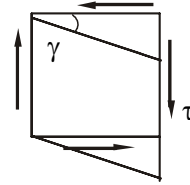
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

2-Liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc

(Định luật Hooke về trượt)

Phân tử ở TTÚS trượt thuần túy (H.4.26). Biến dạng góc (góc trượt) γ biểu thị độ thay đổi góc vuông.



H. 4.26 TTÚS trượt thuần túy- Biến dạng góc

Định luật Hooke về trượt:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.25)$$

trong đó: G - là môđun đàn hồi trượt. Thứ nguyên của G là [lực/(chiều dài)²] và đơn vị thường dùng là N/m² hay MN/m².

Liên hệ giữa E , ν và G như sau: $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

(4.26)

4.4.2 Định luật Hooke khối

Tính độ biến đổi thể tích của một phân tử hình hộp có các cạnh bằng da_1 , da_2 và da_3 .

Thể tích của phân tử trước biến dạng là:

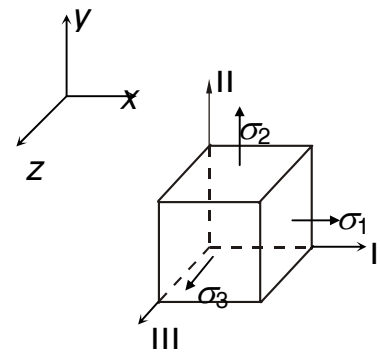
$$V_o = da_1 da_2 da_3$$

Sau biến dạng, phân tử có thể tích là:

$$V_1 = (da_1 + \Delta da_1)(da_2 + \Delta da_2)(da_3 + \Delta da_3)$$

Gọi **biến dạng thể tích tương đối** là θ , ta có:

$$\theta = \frac{V_1 - V_o}{V_o} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.27)$$



H.4.27. TTÚS khối

Thế (4.21)(4.22),(4.23) vào (4.27) $\Rightarrow$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.28)$$

đặt tổng ứng suất pháp là: $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

(4.28) thành: $\theta = \frac{1-2\mu}{E}\Sigma \quad (4.29)$

công thức (4.29) được gọi là **định luật Hooke khối** biểu thị quan hệ tuyến tính giữa biến dạng thể tích tương đối và tổng ứng suất pháp.

Nhận xét :

♦ Từ (4.29), nếu vật liệu có hệ số Poisson $\mu = 0,5$ (cao su), thì θ luôn luôn bằng không tức là thể tích không đổi dưới tác dụng của ngoại lực.

♦ Công thức trên cho thấy θ phụ thuộc vào tổng ứng suất pháp chứ không phụ thuộc vào riêng từng ứng suất pháp. Như vậy, nếu cũng với phân tố ấy ta thay các ứng suất chính bằng một ứng suất trung bình σ_{tb} có giá trị bằng trung bình cộng của ba ứng suất chính nói trên:

$$\sigma_{tb} = \frac{\Sigma}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

thì biến dạng thể tích tương đối của phân tố trên vẫn không thay đổi.

Thật vậy, với những ứng suất chính là σ_{tb} , biến dạng thể tích bằng:

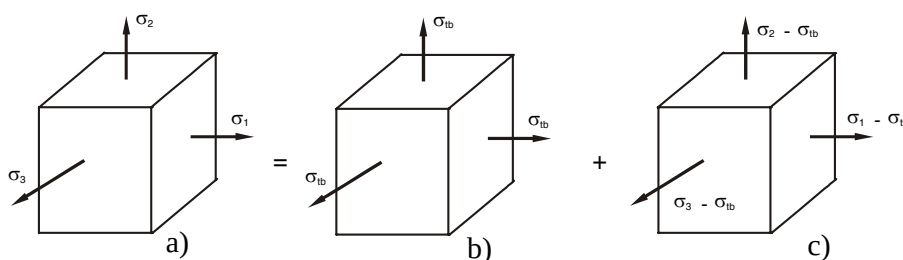
$$\theta_1 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_{tb} + \sigma_{tb} + \sigma_{tb}) = \frac{1-2\mu}{E}\Sigma$$

Kết quả trên có ý nghĩa như sau: với phân tố ban đầu là hình lập phương, trong hai trường hợp trên ta thấy thể tích phân tố đều biến đổi như nhau.

- Tuy nhiên, trong trường hợp đầu khi các ứng suất chính khác nhau, phân tố vừa **biến đổi thể tích** vừa **biến đổi hình dáng** tức là trở thành phân tố hình hộp chữ nhật sau khi biến dạng.

- Còn trong trường hợp thứ hai, khi thay các ứng suất chính bằng ứng suất trung bình, phân tố chỉ biến đổi về thể tích mà không biến đổi hình dáng, nghĩa là sau khi biến dạng phân tố vẫn giữ hình lập phương.

- Về mặt lý luận, có thể phân phân tố ở TTUS khối chịu các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ thành 2 phân tố (H. 4.28). Phân tố b) chỉ biến đổi thể tích, phân tố c) chỉ biến đổi hình dáng.



H.4.28 Phân tích TTUS khối thành 2 TTUS

4.5 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

♦ Ở chương 3, phân tố ở TTUS đơn (thanh bị kéo hoặc nén):

Thể năng biến dạng đàn hồi riêng $u = \sigma \varepsilon / 2$ (4.30)

♦ Trong TTUS khối, sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng, ta có thể năng biến dạng đàn hồi riêng bằng:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (4.31)$$

thay $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ theo định luật Hooke trong (4.21) - (4.23) vào , $\Rightarrow$

$$u = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1 [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \}$$

$$\text{hay } u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (4.32)$$

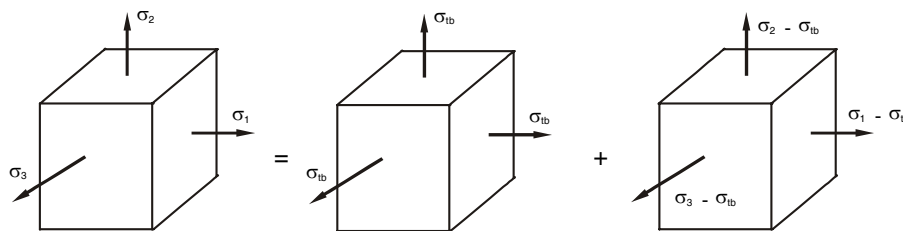
Ta có thể phân tích thể năng biến dạng đàn hồi u thành hai thành phần:

-Thành phần làm đổi thể tích gọi là **thể năng biến đổi thể tích u_{tt}**

-Thành phần làm đổi hình dáng gọi là **thể năng biến đổi hình dáng u_{hd}**

Ta có: $u = u_{tt} + u_{hd}$

Để tính thể năng biến đổi hình dáng, ta thay các ứng suất σ_1, σ_2 và σ_3 bằng ứng suất $(\sigma_1 - \sigma_{1b}), (\sigma_2 - \sigma_{1b}), (\sigma_3 - \sigma_{1b})$, tác dụng lên các mặt phân tố.



H.4.29 Phân tích TTUS thành hai TTUS

Thế vào (4.32) ta có thể năng biến đổi hình dáng bằng:

$$u_{hd} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

hay :
$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \quad (4.33)$$

♦ **TTƯS đơn**, thay $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$ vào (4.32) và (4.33), ta được thế năng riêng và thế năng biến đổi hình dáng như sau:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2 \quad (4.34)$$

Thí dụ 4.4: Cho phân tố như hình vẽ:

ở trạng thái ứng suất phẳng.

Tính $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_u$ (phương utạo với trục x một góc 30°).

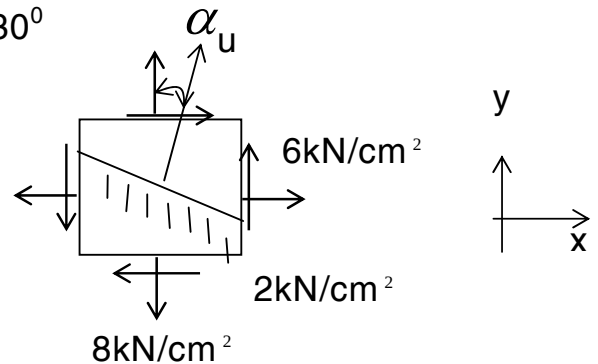
Cho $E = 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,34$, $\alpha = 30^\circ$

Ta có $\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2$

$\sigma_y = 8 \text{ kN/cm}^2$

$\tau = -2 \text{ kN/cm}^2$

$\alpha = 60^\circ$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_y] = \frac{1}{10^4} [6 - (0,34)8] = 3,28 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_x] = \frac{1}{10^4} [8 - (0,34)6] = 5,96 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 9,232 \text{ kN/cm}^2$$

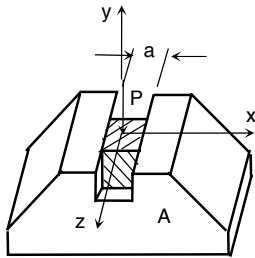
$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u - \mu \sigma_v] = \frac{1}{E} [\sigma_u - \mu (\sigma_x + \sigma_y - \sigma_u)] = 7,611 \text{ kN/cm}^2$$

Thí dụ 4.5:

Một khối lập phương bằng bê tông đặt vừa khít vào rãnh của vật thể A (tuyệt đối cứng) chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên $P = 1 \text{ kN/cm}^2$ (H.4.11).

Xác định áp lực nén vào vách rãnh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng dài tương đối theo các phương. Độ biến dạng thể tích tuyệt đối. Cho cạnh $a = 5 \text{ cm}$; $E = 8 \cdot 10^2 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,36$.

Chọn hệ trục như hình vẽ. Ta có: khối bê tông ở TTÚSphẳng.

**H.4.11**

$$\sigma_x \neq 0; \quad \sigma_y = -p \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_z \neq 0; \quad \varepsilon_y \neq 0; \quad \varepsilon_x = 0$$

Định luật Hooke cho biến dạng dài:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\mu p = -(0,36 \times 1) = -0,36 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{-p}{E} (1 - \mu^2)$$

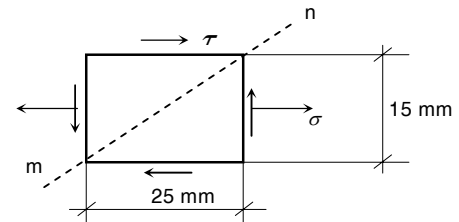
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [0 - \mu(-\mu p - p)] = \frac{\mu p}{E} (1 + \mu)$$

Biến dạng thể tích tuyệt đối:

$$\begin{aligned} \Delta_v &= \theta V = \frac{1-2\mu}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z] V \\ &= \frac{1-(2 \times 0,36)}{800} [-0,36 - 1] (5 \times 5 \times 5) = -0,0559 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Thí dụ 4.6

Một tấm mỏng có kích thước như trên H.4.5 chịu tác dụng của ứng suất kéo $\sigma = 30 \text{ kN/cm}^2$ theo phương chiều dài của tấm và ứng suất tiếp $\tau = 15 \text{ kN/cm}^2$.



H 4 5

- a) Xác định ứng suất pháp theo phương đường chéo mn và phương vuông góc với đường chéo
b) Tính biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo mn.

Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,3$

Gọi $\sigma_u = \sigma_{mm}$, $\varepsilon_u = \frac{\Delta l_{mm}}{l_{mm}} \Rightarrow \Delta l_{mm} = l_{mm} \times \varepsilon_u$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u - \eta \sigma_v]$$

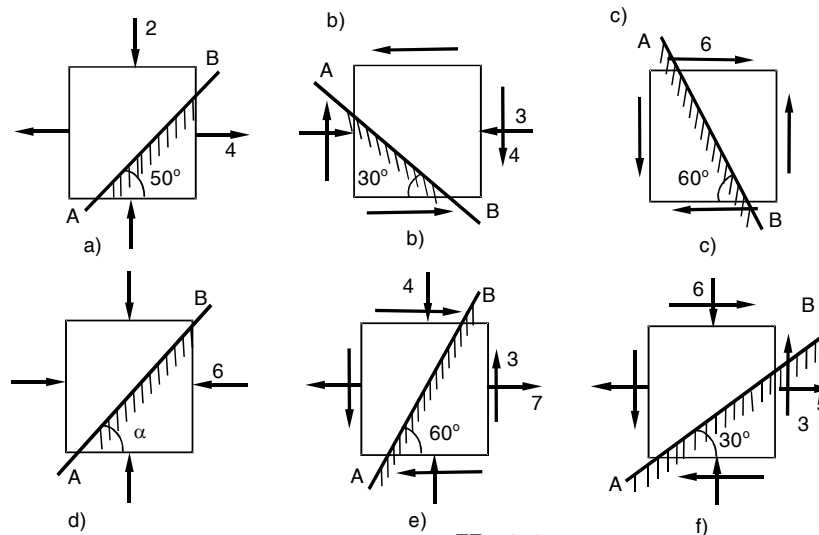
$$\sigma_u = \frac{30+0}{2} + \frac{30-0}{2} \cos 60^\circ - (-15) \sin 60^\circ = 35,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{mm} = \frac{1}{E} [\sigma_u - \eta (\sigma_u - \sigma_u)] = 1,8575 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l_u = \Delta l_{mm} = 1,8575 \cdot 10^{-3} \times 50 = 0,093 \text{ mm}$$

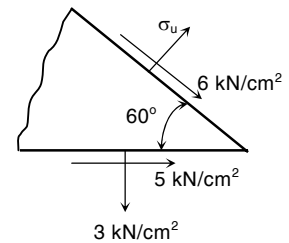
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Tìm giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt AB của phân tố như trên H.4.1 bằng phương pháp giải tích và đồ thị. Đơn vị ứng suất tính bằng kN/cm^2 .



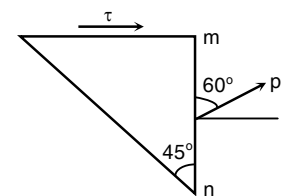
H. 4.1

4.2 Trên hai mặt tạo với nhau một góc $\alpha = 60^\circ$ và đi qua một điểm ở TTÚS phẳng có các ứng suất như trên H.4.2. Hãy tính các ứng suất chính tại điểm đó, ứng suất pháp σ_u và biến dạng tương đối ε_u theo phương u . Cho: $E = 2.10 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H.4.2

4.3 Trên mặt cắt m - n đi qua một điểm trong vật thể ở TTÚS phẳng có ứng suất toàn phần $p = 3000 \text{ N/cm}^2$, ứng suất này có phương tạo thành góc 60° với mặt cắt. Trên mặt vuông góc với mặt cắt đó chỉ có ứng suất tiếp (H.4.3).

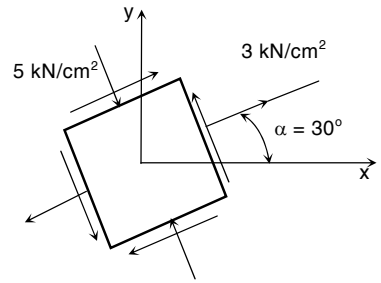


H. 4.3

Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt hợp với mặt cắt m - n một góc 45° . Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.

4.4 Tại một điểm trên bề mặt của vật thể, ứng suất tác dụng lên phân tố nghiêng một góc 30° với trục x có trị số và hướng như trên H.4.30.

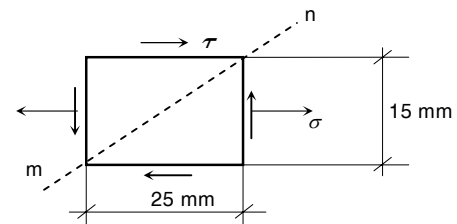
- Xác định ứng suất chính và phương chính.
- Xác định ứng suất tiếp cực trị và ứng suất pháp trên bề mặt có ứng suất tiếp cực trị. Biểu diễn các ứng suất đó trên H.4.4.



H. 4.4

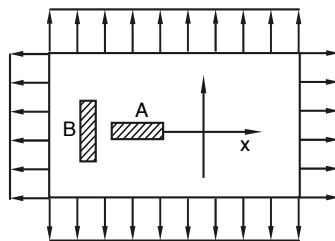
4.5 Một tấm mỏng có kích thước như trên H.4.5 chịu tác dụng của ứng suất kéo $\sigma = 30 \text{ kN/cm}^2$ theo phương chiều dài của tấm và ứng suất tiếp $\tau = 15 \text{ kN/cm}^2$.

- Xác định ứng suất pháp theo phương đường chéo mn và phương vuông góc với đường chéo
 - Tính biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo mn .
- Cho $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,3$.

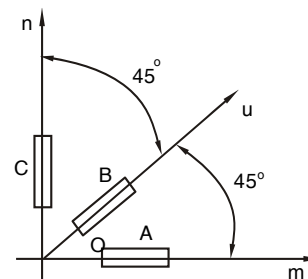


H. 4.5

4.6 Một tấm thép mỏng hình chữ nhật chịu ứng suất pháp phân bố đều σ_x và σ_y như trên H.4.6. Các tấm điện trở A và B được gắn lên tấm theo hai phương x và y cho các số đo như sau: $\varepsilon_x = 4,8 \cdot 10^{-4}$ và $\varepsilon_y = 1,3 \cdot 10^{-4}$. Tính σ_x và σ_y , biết $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H. 4.6



H. 4.7

4.7 Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực, người ta gắn các tấm điện trở A, B, C để đo biến dạng tỷ đối theo các phương Om , On và Ou (H.4.7). Các số đo thu được: $\varepsilon_m = -2,81 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_n = -2,81 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_u = 1,625 \cdot 10^{-4}$

Xác định ứng suất chính, phương chính tại điểm đó.

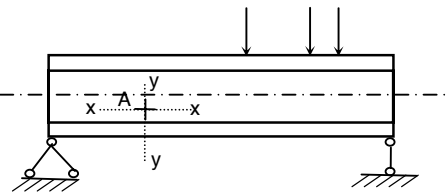
Cho : $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.

4.8 Tại điểm A của một dầm cầu có gắn hai tenxômét để đo biến dạng theo phương nằm ngang và phương thẳng đứng (H.4.8).

Khi xe chạy qua cầu, người ta đo được: ε_x

$= 0,0004$; $\varepsilon_y = -0,00012$. Tính ứng suất pháp theo phương dọc và phương thẳng

đứng của dầm. Cho biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H.4.8

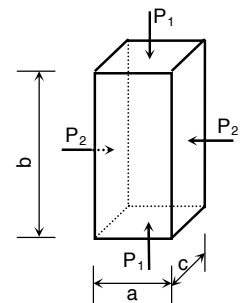
4.9 Có một phân tố hình hộp có các cạnh: $a = 2 \text{ cm}$;

$b = 4 \text{ cm}$; $c = 2 \text{ cm}$, chịu tác dụng của các lực P_1 , P_2 trên bốn mặt của phân tố (xem H.4.9). Cho : $P_1 = 60 \text{ kN}$; $P_2 = 120 \text{ kN}$; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.

a) Xác định các biến dạng dài Δa , Δb , Δc của các cạnh a , b , c và biến đổi thể tích của phân tố hình hộp.

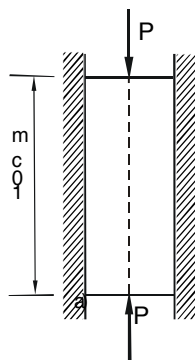
b) Muốn biến đổi thể tích $\Delta V = 0$ thì phải đặt thêm lực pháp tuyến P_3 bằng bao nhiêu vào hai mặt còn lại?

Tính $\tau_{\max}$ trong trường hợp này.

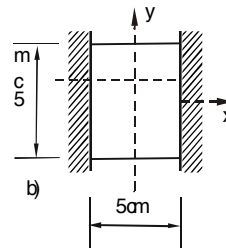


H.4.9

4.10 Một khối hình hộp làm bằng thép có kích thước cho trên H.4.10, được đặt giữa hai tấm cứng tuyệt đối, chịu lực nén $P = 250 \text{ kN}$. Tính lực tác dụng tương hỗ giữa mặt tiếp xúc của hình hộp với các tấm cứng. Cho $\mu = 0,3$.



H.4.10



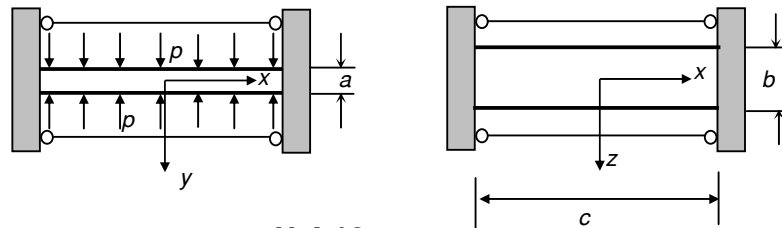
4.11 Một khối lập phương bằng bê tông đặt vừa khít rãnh của vật thể A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên $P = 1 \text{ kN/cm}^2$ (H.4.11).

Xác định áp lực nén vào vách rãnh và độ biến dạng thể tích tuyệt đối.

Cho cạnh $a = 5 \text{ cm}$; $E = 8 \cdot 10^2 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,36$.

. Vật thể A coi như cứng tuyệt đối.

4.12 Một tấm thép kích thước $a \times b \times c$ đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng, hai tấm này được liên kết với nhau bằng bốn thanh như H.4.12. Khi tấm thép chịu áp lực p phân bố trên hai mặt bên thì ứng suất kéo của thanh là bao nhiêu? Tính ứng suất chính trong tấm thép. Cho $E_{\text{tấm}} = E_{\text{thanh}}$ và diện tích F của thanh.



H.4.12

Chương 5

LÝ THUYẾT BỀN

5.1 KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT BỀN

♦ Điều kiện bền thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm (chương 3), (TTÚS đơn) :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k ; \quad |\sigma_{\min}| = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n$$

trong đó, $[\text{Ứng suất cho phép}] = \frac{\text{Ứng suất nguy hiểm của vật liệu } (\sigma_0)}{\text{Hệ số an toàn}} ; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$

Ứng suất nguy hiểm σ_0 có được từ những thí nghiệm kéo (nén) đúng tâm:

- Đối với vật liệu dẻo là giới hạn chảy σ_{ch}
- Đối với vật liệu giòn là giới hạn bền σ_b .

♦ Để viết điều kiện bền ở một điểm của vật thể ở TTÚS phức tạp (phẳng hay khối), cần phải có kết quả thí nghiệm phá hỏng những mẫu thử ở TTÚS tương tự. Việc thực hiện những thí nghiệm như thế rất khó khăn vì:

- Ứng suất nguy hiểm phụ thuộc vào độ lớn của các ứng suất chính và phụ thuộc vào tỉ lệ giữa những ứng suất này. Do đó phải thực hiện một số lượng rất lớn các thí nghiệm mới đáp ứng được tỉ lệ giữa các ứng suất chính có thể gặp trong thực tế

- Thí nghiệm kéo, nén theo ba chiều cần những thiết bị phức tạp, không phổ biến rộng rãi như thí nghiệm kéo nén một chiều

Vì vậy, không thể căn cứ vào thí nghiệm trực tiếp mà phải dựa trên các giả thiết về nguyên nhân gây ra phá hỏng của vật liệu hay còn gọi là những **thuyết bền** để đánh giá độ bền của vật liệu.

Định nghĩa :Thuyết bền là những giả thuyết về nguyên nhân phá hoại của vật liệu, nhờ đó đánh giá được độ bền của vật liệu ở mọi TTÚS khi chỉ biết độ bền của vật liệu ở TTÚS đơn (do thí nghiệm kéo, nén đúng tâm).

Nghĩa là, với phân tố ở TTÚS bất kỳ có các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ta phải tìm ứng suất tính theo thuyết bền là một hàm của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rồi so sánh với $[\sigma]_k$ hay $[\sigma]_n$ ở TTÚS đơn.

⇒ **Điều kiện bền** của vật liệu có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau: $\sigma_t = \sigma_{td} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]_k$ (hay $\sigma_t = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]_n$)

σ_t, σ_{td} được gọi là **ứng suất tính** hay **ứng suất tương đương**. Vấn đề là phải xác định hàm f hay là tìm được thuyết bền tương ứng.

5.2 CÁC THUYẾT BỀN (TB) CƠ BẢN

1- Thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất (TB 1)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do ứng suất pháp lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp đạt đến ứng suất nguy hiểm ở TTÚS đơn.

♦ Nếu ký hiệu:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: ứng suất chính của TTÚS phức tạp

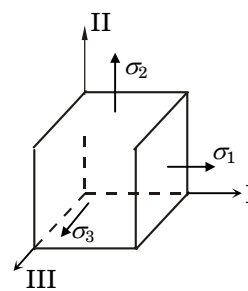
σ_{0k} hay σ_{0n} - ứng suất nguy hiểm về kéo và nén

n - hệ số an toàn

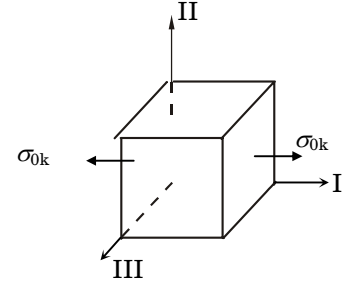
⇒ **Điều kiện bền** theo TB 1:

$$\sigma_{t1} = \sigma_1 \leq \frac{\sigma_{0k}}{n} = [\sigma]_k \quad (5.1a)$$

$$\sigma_{t1} = |\sigma_3| \leq \frac{\sigma_{0n}}{n} = [\sigma]_n \quad (5.1b)$$



H.5.1. TTÚS khối



H.5.2. Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn

trong đó: σ_{t1} - là ứng suất tính hay ứng suất tương đương theo TB 1

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB 1, trong nhiều trường hợp, không phù hợp với thực tế. Thí dụ trong thí nghiệm mẫu thử chịu áp lực giống nhau theo ba phương (áp lực thủy tĩnh), dù áp lực lớn, vật liệu hầu như không bị phá hoại. Nhưng theo TB 1 thì vật liệu sẽ bị phá hỏng khi áp lực đạt tới giới hạn bền của trường hợp nén theo một phương.

TB 1 không kể đến ảnh hưởng của các ứng suất khác cho nên TB này **chỉ đúng đối với TTÚS đơn**.

2- Thuyết bền biến dạng dài tương đối lớn nhất (TB 2)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp đạt đến biến dạng dài tương đối lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở TTÚS đơn.

♦ Gọi ε_1 : biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp

ε_{0k} : biến dạng dài tương đối ở trạng thái nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (TTÚS đơn).

Theo định luật Hooke, ta có:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (a)$$

$$\varepsilon_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (b)$$

Thanhđg Tuấn

Kết hợp (a) và (b), kể đến hệ số an toàn n

⇒ **Điều kiện bền** theo TB 2:

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{1}{n} \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (c)$$

hay $\sigma_{t2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_k \quad (5.2a)$

Đối với trường hợp biến dạng co ngắn, ta có

$$\sigma_{t2} = |\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq [\sigma]_k \quad (5.2b)$$

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB biến

dạng dài tương đối tiến bộ hơn so với TB ứng suất pháp vì có kể đến ảnh hưởng của cả ba ứng suất chính. Thực nghiệm cho thấy TB này chỉ phù hợp với vật liệu dòn và ngày nay **ít được dùng trong thực tế**.

3- Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (TB 3)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố ở TTÚS phức tạp đạt đến ứng suất tiếp lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tố ở TTÚS đơn.

♦ Gọi: τ_{max} - ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố ở TTÚS phức tạp ;

τ_{0k} - ứng suất tiếp lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tố bị kéo theo một phương (TTÚS đơn).

n – Hệ số an toàn

⇒ Điều kiện bền theo TB 3: $\tau_{max} \leq \frac{\tau_{0k}}{n} \quad (d)$

trong đó, theo (4.18), chương 4, ta có:

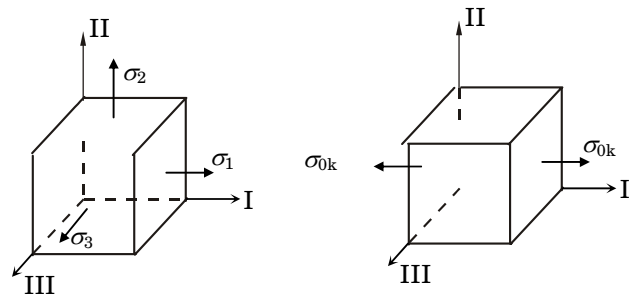
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{2} \quad (e)$$

(e) vào (d), ⇒ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_{0k}}{2n}$

⇒ **Điều kiện bền** theo TB 3:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (5.3)$$

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB ứng suất tiếp lớn nhất phù hợp với thực nghiệm hơn nhiều so với hai TB 1 và TB 2 . Tuy không kể tới ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 song TB này tỏ ra khá **thích hợp với vật liệu dẻo** và ngày nay **được sử dụng nhiều trong tính toán cơ khí và xây dựng**. Nó cũng phù hợp với kết quả mẫu thử chịu áp lực theo ba phương.



H.5.1. TTÚS khối **H.5.2. Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn**

4- Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (TB 4)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do thế năng biến đổi hình dáng của phân tố ở TTÚS phức tạp đạt đến thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tố ở TTÚS đơn.

♦ Gọi: u_{hd} - Thế năng biến đổi hình dáng của phân tố ở TTÚS phức tạp

$(u_{hd})_o$ - Thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tố bị kéo theo một phương (ở TTÚS đơn).

n – Hệ số an toàn

⇒ Điều kiện để phân tố ở TTÚS phức tạp không bị phá hỏng là bền theo TB 4 là:

$$u_{hd} < (u_{hd})_o \quad (g)$$

Theo 4.5 ,chương 4, ta đã có:

$$u_{hd} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (h)$$

$$(u_{hd})_o = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{0k}^2$$

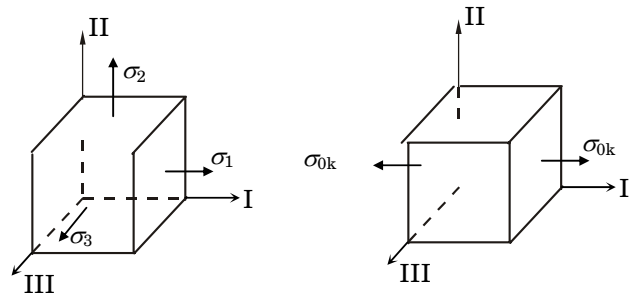
Thế (h) vào (g) , lấy căn bậc hai của hai vế , kể đến hệ số an toàn n
⇒ **Điều kiện bền** theo TB 4:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k$$

$$\text{hay là:} \quad \sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k \quad (5.4)$$

trong đó: σ_{t4} - là ứng suất tương đương theo thuyết bền thứ tư.

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB thế năng biến đổi hình dáng được dùng phổ biến trong kỹ thuật vì khá **phù hợp với vật liệu dẻo**. Ngày nay **được sử dụng nhiều trong tính toán cơ khí và xây dựng** .



H.5.1. TTÚS khối **H.5.2.** Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn

CÁC KẾT QUẢ ĐẶC BIỆT:**1- TTÚS phẳng đặc biệt (H.5.3):**

Các ứng suất chính : $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0$

Theo TB ứng suất tiếp (5.3):

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.5)$$

Theo TB thế năng biến đổi hình dáng (5.4):

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_3\sigma_2} \leq [\sigma]$$

$$\text{hay: } \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.6)$$

2- TTÚS trượt thuần túy (H.5.4):

Các ứng suất chính : $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|; \quad \sigma_2 = 0$

Theo TB ứng suất tiếp:

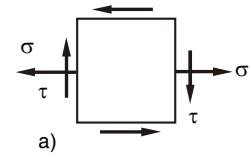
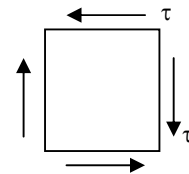
$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2|\tau| \leq [\sigma]$$

$$\text{hay: } |\tau| \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (5.7)$$

Theo TB thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{3\tau^2} \leq [\sigma]$$

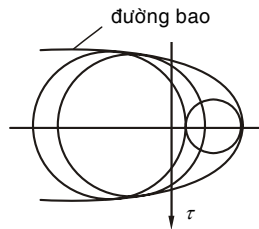
$$\text{hay: } |\tau| \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (5.8)$$

**H. 5.3****H.5.4**

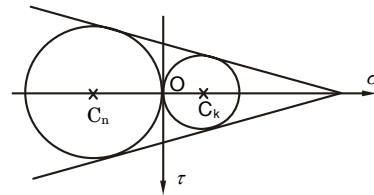
5- Thuyết bền về các TTÚS giới hạn (TB 5 hay là TB Mohr)

TB Mohr được xây dựng trên cơ sở các kết quả thực nghiệm, khác với các TB trước xây dựng trên cơ sở các giả thuyết.

Ở chương 4, ta đã biết một TTÚS khối với ba ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3 có thể biểu diễn bằng ba vòng tròn Mohr 1, 2 và 3 với đường kính tương ứng là $\sigma_2 - \sigma_3, \sigma_1 - \sigma_3$ và $\sigma_1 - \sigma_2$ như Hình.4.22. Nếu vật liệu ở trạng thái nguy hiểm thì những vòng tròn tương ứng với TTÚS nguy hiểm được gọi là những vòng tròn Mohr giới hạn. Thực nghiệm cho thấy, ứng suất pháp σ_2 ít ảnh hưởng đến sự phá hoại của vật liệu nên ta chỉ để ý đến vòng tròn Mohr lớn nhất gọi là *vòng tròn chính* xác định bởi đường kính $\sigma_1 - \sigma_3$.



H. 5.5 Các vòng tròn Mohr giới hạn và đường cong giới hạn



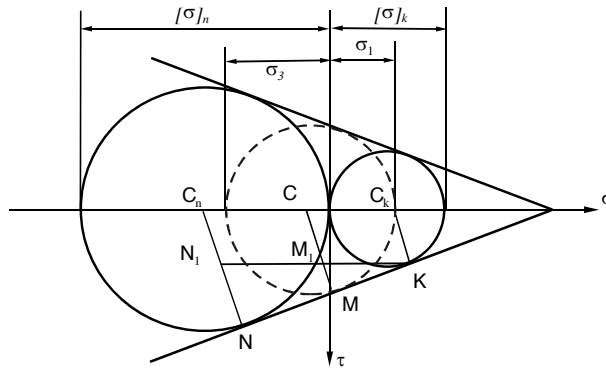
H. 5.6 Đường bao giới hạn đơn giản hóa

Tiến hành thí nghiệm cho các TTÚS khác nhau và tìm trạng thái giới hạn tương ứng của chúng, trên mặt phẳng tọa độ σ, τ ta vẽ được một họ các đường tròn chính giới hạn như ở H.5.5. Nếu vẽ đường bao những vòng tròn đó ta sẽ thu được một *đường cong giới hạn*, đường cong này cắt trục hoành ở điểm tương ứng với trạng thái có ba ứng suất chính là ứng suất kéo có giá trị bằng nhau. Giả thiết rằng đường bao là duy nhất đối với mỗi loại vật liệu, ta nhận thấy nếu TTÚS nào biểu thị bằng một vòng tròn chính nằm trong đường bao thì vật liệu đảm bảo bền, vòng tròn chính tiếp xúc với đường bao thì TTÚS đó ở giới hạn bền còn nếu vòng tròn chính cắt qua đường bao thì vật liệu bị phá hỏng.

Việc phải thực hiện một số lượng lớn các thí nghiệm để xác định các vòng tròn giới hạn và vẽ chính xác đường cong giới hạn là không đơn giản. Vì vậy, người ta thường vẽ gần đúng đường bao bằng cách dựa trên cơ sở hai vòng tròn giới hạn kéo và nén theo một phương với đường kính tương ứng là $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Ở đây, để cho tiện ta thay thế các ứng suất nguy hiểm σ_{0k} và σ_{0n} bằng ký hiệu ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$ tức là đã có kể tới hệ

Thanhđg Tuấn

số an toàn. Đường bao được thay thế bằng đường thẳng tiếp xúc với hai vòng tròn giới hạn như trên H.5.6.



H. 5.7 Trạng thái ứng suất giới hạn và đường bao

Xét một TTÚS khối có vòng tròn Mohr lớn nhất σ_1 và σ_3 tiếp xúc với đường bao, nằm ở giới hạn về độ bền. Trên H.5.7, vòng tròn này được vẽ bằng đường nét đứt. Sau đây, ta thiết lập liên hệ giữa những ứng suất chính σ_1 và σ_3 với các ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Từ hình vẽ ta có tỷ lệ thức:

$$\frac{NN_1}{KN_1} = \frac{MM_1}{KM_1}$$

Thay thế các trị số:

$$NN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n - [\sigma]_k); \quad KN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n + [\sigma]_k)$$

$$MM_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k); \quad KM_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3))$$

vào tỷ lệ thức trên, ta nhận được điều kiện giới hạn:

$$\frac{[\sigma]_n - [\sigma]_k}{[\sigma]_n + [\sigma]_k} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k}{[\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3)}$$

hoặc:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 = [\sigma]_k$$

Như vậy, điều kiện bền theo TB Mohr (TB 5) được viết là: $\sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma]_k$

(5.9a)

với hệ số: $\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$ (5.9b)

Tuy bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 và đơn giản hóa đường cong giới hạn thành đường thẳng, thuyết bền Mohr có ưu điểm hơn những thuyết bền trên vì nó không dựa vào giả thuyết nào mà căn cứ trực tiếp vào trạng thái giới hạn của vật liệu. Thực tế cho thấy **TB này phù hợp với vật liệu giòn**, tuy nhiên nó cho kết quả chính xác chỉ khi vòng tròn giới hạn của TTÚS đang xét nằm trong khoảng hai vòng tròn giới hạn kéo và nén.

5.3 VIỆC ÁP DỤNG CÁC TB

Trên đây là những TB được dùng tương đối phổ biến. Việc áp dụng TB này hay TB khác để giải quyết bài toán cụ thể phụ thuộc vào loại vật liệu sử dụng và TTÚS của điểm kiểm tra.

Đối với TTÚS đơn, người ta dùng TB 1 để kiểm tra độ bền.

Đối với TTÚS phức tạp, nếu là vật liệu giòn, người ta thường dùng TB 5 (TB Mohr) hay TB 2, nếu là vật liệu dẻo người ta dùng TB 3 hay TB 4.

Hiện nay, có nhiều TB mới được xây dựng, tổng quát hơn và phù hợp hơn với kết quả thực nghiệm. Tuy vậy, những TB này cũng có những nhược điểm nhất định nên chưa được sử dụng rộng rãi.

Thí dụ: Kiểm tra bền phân tố vật thể ở TTÚS khối như trên H.5.8. Ứng suất cho theo kN/cm^2 . Cho biết: $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

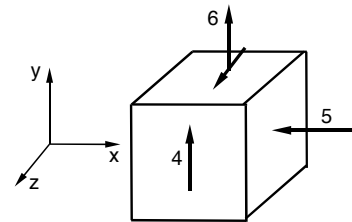
Giải.

Chọn hệ tọa độ như trên H.5.8.

Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 6 \text{ kN/cm}^2, \tau_{zy} = -\tau_{yz} = 4 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$$



H. 5.8

Mặt vuông góc với trục x là mặt chính với ứng suất chính $\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2$. Hai ứng suất chính còn lại nằm trong mặt phẳng vuông góc với ứng suất chính đã cho và có giá trị bằng:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8 \text{ kN/cm}^2 \\ -2 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \sigma_1 = 8 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -2 \text{ kN/cm}^2; \sigma_3 = -5 \text{ kN/cm}^2$$

Theo TB ứng suất tiếp:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 8 - (-5) = 13 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2$$

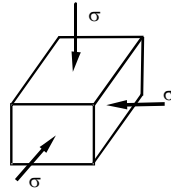
Theo TB thế năng biến đổi hình dáng:

$$\begin{aligned} \sigma_{t4} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \\ &= \sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2 - (-2) \times 8 - 8(-5) - (-2)(-5)} \\ &= 11,79 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

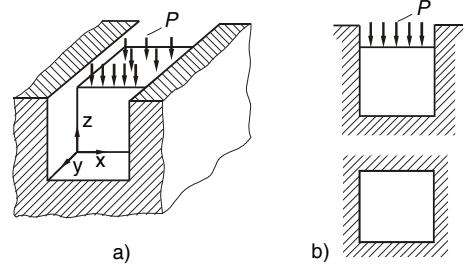
Như vậy, theo cả hai TB phân tố này đảm bảo bền.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1 Khi nén vật liệu theo ba phương cùng với trị số ứng suất pháp (H.5.1), người ta thấy vật liệu không bị phá hoại. Hãy kiểm tra bền đối với phân tố trên bằng TB ứng suất tiếp lớn nhất và TB thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất.



H. 5.1

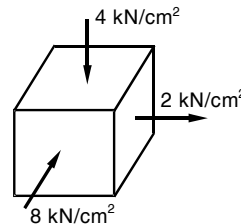


H. 5.2

5.2 Dùng TB ứng suất tiếp lớn nhất để tính áp lực p lớn nhất tác dụng trên khối thép trên H.5.2. Khối thép đó được đặt khít vào trong khối thép lớn.

Cho $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,28$;
 $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

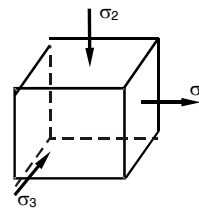
5.3 Cho TTÚS như H.5.3. Tính ứng suất tương đương (vế trái của công thức kiểm tra bền) theo TB thế năng biến đổi hình dáng và TB Mohr. Cho $\sigma_{ok}/\sigma_{on} = 0,25$.



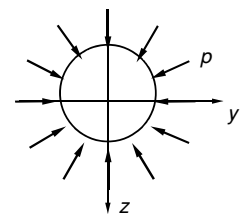
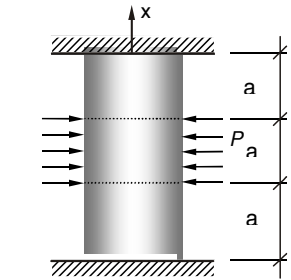
H. 5.3

5.4 Cho TTÚS tại một điểm của vật thể chịu lực như H.5.4:

$\sigma_1 = 20 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_2 = -40 \text{ kN/cm}^2$;
 $\sigma_3 = -80 \text{ kN/cm}^2$



H. 5.4



H. 5.5

Kiểm tra độ bền theo TB 3 và TB 4.

Biết $[\sigma] = 120 \text{ kN/cm}^2$.

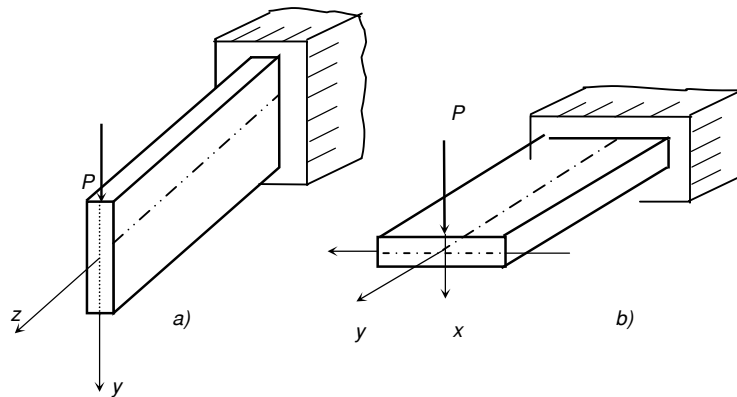
5.5 Một trụ tròn bằng thép ($\mu = 0,3$) đặt khít giữa hai tường cứng như H.5.5. Phần giữa của trụ chịu áp lực p phân bố đều. Tính ứng suất tương đương theo TB 4 ở phần giữa và phần đầu của hình trụ.

Chương 6

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

6.1 KHÁI NIỆM

Ở chương 3, khi tính độ bền của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ta thấy ứng suất trong thanh chỉ phụ thuộc vào độ lớn của diện tích mặt cắt ngang F (mặt cắt F , diện tích F). Trong những trường hợp khác, như thanh chịu uốn, xoắn... thì ứng suất trong thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích F mà còn phụ thuộc vào hình dáng, cách bố trí mặt cắt... nghĩa còn những yếu tố khác mà người ta gọi chung là **đặc trưng hình học của mặt cắt ngang**.



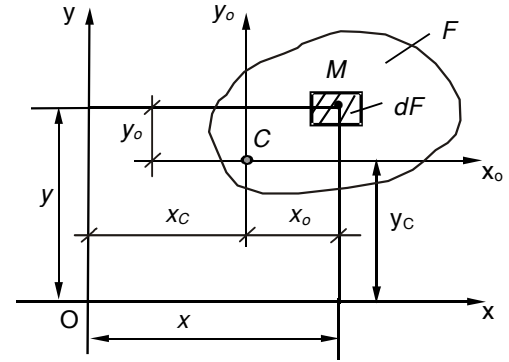
H.6.1. Dầm chịu uốn

a) Tiết diện đứng; b) Tiết diện nằm ngang

Xét thanh chịu uốn trong hai trường hợp mặt cắt đặt khác nhau như trên H.6.1. Bằng trực giác, dễ dàng nhận thấy trường hợp a), thanh chịu lực tốt hơn trường hợp b), tuy rằng trong hai trường hợp diện tích của mặt cắt ngang thanh vẫn như nhau. Như vậy, khả năng chịu lực của thanh còn phụ thuộc vào cách sắp đặt và vị trí mặt cắt ngang đối với phương tác dụng của lực. (Ứng suất nhỏ 04 lần độ võng nhỏ 16 lần). Cho nên sự chịu lực không những phụ thuộc F , mà cần phải nghiên cứu các đặc trưng hình học khác của mặt cắt ngang để tính toán độ bền, độ cứng, độ ổn định và thiết kế mặt cắt của thanh cho hợp lý.

6.2 MÔMEN TÍNH - TRỌNG TÂM

Xét một hình phẳng biểu diễn mặt cắt ngang F (mặt cắt F) như trên H.6.2. Lập một hệ tọa độ vuông góc Oxy trong mặt phẳng của mặt cắt. $M(x,y)$ là một điểm bất kỳ trên hình. Lấy chung quanh M một diện tích vi phân dF .



H.6.2 Mặt cắt F và trọng tâm C

♦ **Mômen tĩnh** của mặt cắt F đối với trục x (hay y) là tích phân:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF \quad (6.1)$$

vì x, y có thể âm hoặc dương nên mômen tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương.

Thứ nguyên của mômen tĩnh là $[(\text{chiều dài})^3]$.

♦ **Trục trung tâm** là trục có mômen tĩnh của mặt cắt F đối với trục đó bằng không.

♦ **Trọng tâm** là giao điểm của hai trục trung tâm.

⇒ **Mômen tĩnh đối với một trục đi qua trọng tâm bằng không.**

♦ **Cách xác định trọng tâm C** của mặt cắt F :

Dựng hệ trục $x_o C y_o$ song song với hệ trục $x O y$ ban đầu (H.6.2). Ta có

$$x = x_C + x_o; \quad y = y_C + y_o, \quad \text{với } C(x_c, y_c)$$

Thay vào (6.1), ⇒

$$S_x = \int_F (y_C + y_o) dF = y_C \int_F dF + \int_F y_o dF = y_C F + S_{x_o}$$

vì trục x_o là trục trung tâm nên $S_{x_o} = 0$, ⇒

$$S_x = y_C F, \quad \text{và} \quad S_y = x_C F \quad (6.2)$$

Từ (6.2) ⇒

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} \quad (6.3)$$

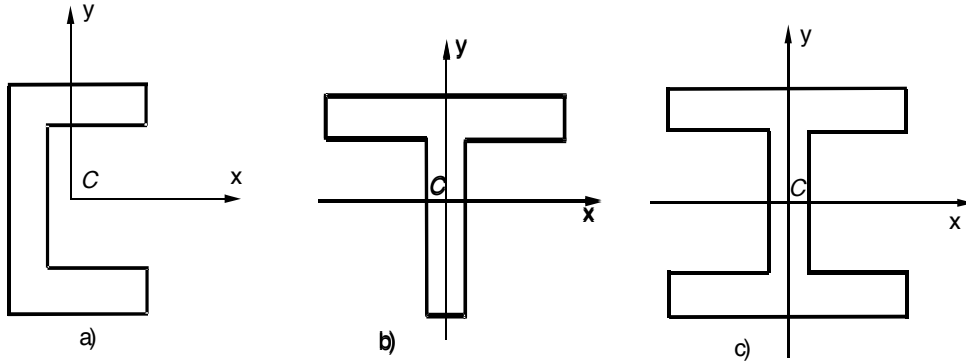
Kết luận: Tọa độ trọng tâm $C(x_C, y_C)$ được xác định trong hệ trục $x O y$ ban đầu theo mômen tĩnh S_x, S_y và diện tích F theo (6.4).

Ngược lại, nếu biết trước tọa độ trọng tâm, có thể sử dụng (6.2), (6.3) để xác định các mômen tĩnh.

Nhận xét 1:

Mặt cắt có trục đối xứng, trọng tâm nằm trên trục này vì mômen tĩnh đối với trục đối xứng bằng không (H.6.3a,b).

Mặt cắt có hai trục đối xứng, trọng tâm nằm ở giao điểm hai trục đối xứng (H.6.3c).



H.6.3 Mặt cắt có trục đối xứng

Thực tế, có thể gặp những mặt cắt ngang có hình dáng phức tạp được ghép từ nhiều hình đơn giản.

Tính chất: mômen tĩnh của hình phức tạp bằng tổng mômen tĩnh của các hình đơn giản.

Với những hình đơn giản như chữ nhật, tròn, tam giác hoặc mặt cắt các loại thép định hình I, U, V, L... ta đã biết trước (hoặc có thể tra theo các bảng trong phần phụ lục) diện tích, vị trí trọng tâm, từ đó dễ dàng tính được mômen tĩnh của hình phức tạp gồm n hình đơn giản:

$$\begin{aligned} S_x &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i \\ S_y &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i \end{aligned} \quad (6.4)$$

trong đó: F_i, x_i, y_i - diện tích và tọa độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i ,
 n - số hình đơn giản.

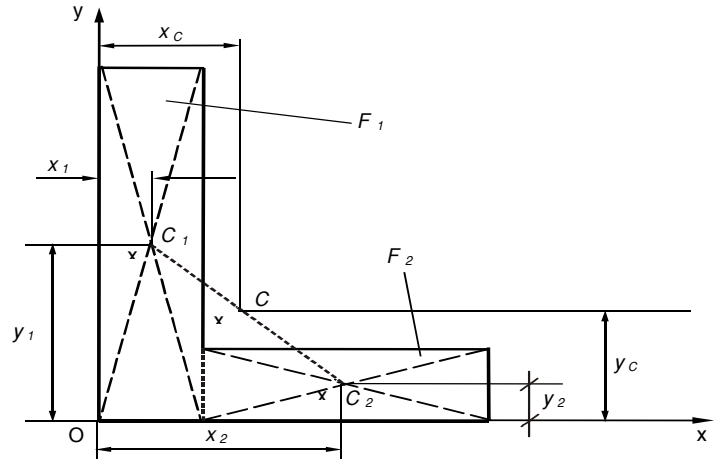
$\Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm của một hình phức tạp trong hệ tọa độ xy .

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (6.5)$$

Thí dụ 6-1 Xác định trọng tâm mặt cắt chữ L chỉ gồm hai hình chữ nhật như trên H.6.4. Tọa độ trọng tâm C của hình trên là:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F_1 + F_2}$$



H.6.4 Trọng tâm hình phức tạp

Thí dụ 6.2 Một mặt cắt thanh ghép, gồm thép chữ I số hiệu N°55, thép chữ [số hiệu N°27, và thép chữ nhật $15 \times 1,2$ cm (H.6.5). Xác định trọng tâm C của mặt cắt.

Giải.

Tra bảng (ГОСТ 8239-89) $\Rightarrow$ số liệu sau:

- Đối với thép chữ I N°55:

$$h_2 = 55 \text{ cm}$$

$$t = 1,65 \text{ cm}$$

$$F_2 = 118 \text{ cm}^2$$

- Đối với thép chữ [N°27:

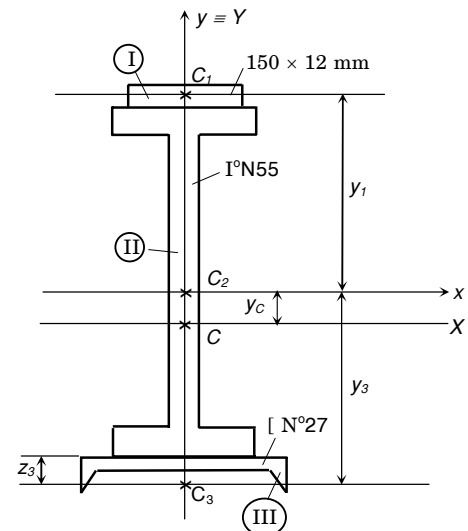
$$h_3 = 27 \text{ cm}$$

$$F_3 = 35,2 \text{ cm}^2$$

$$z_3 = 2,47 \text{ cm}$$

- Hình chữ nhật:

$$F_1 = 15 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$



H.6.5. Trọng tâm C của hình ghép

Chọn hệ trục tọa độ xy qua gốc $C_2 \Rightarrow$ tọa độ trọng tâm của ba hình trên là:

$$y_1 = \frac{55}{2} + \frac{1,2}{2} = 28,1 \text{ cm}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = \frac{55}{2} + 2,47 = 29,97 \text{ cm}$$

Diện tích và mômen tĩnh của toàn mặt cắt là:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 18 + 118 + 35,2 = 171,2 \text{ cm}^2$$

$$S_x = y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 = (28,1)(18) + 0 - (29,97)(35,2) = -549,144 \text{ cm}^3$$

vì y là trục đối xứng, trọng tâm C sẽ nằm trên trục này.

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } C \text{ là: } x_C = 0; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{-549,144}{171,2} \approx -32 \text{ cm}$$

Dấu $(-)$ cho thấy trọng tâm C nằm phía dưới trục x .

Chú ý rằng, **trục x có thể chọn tùy ý** song ở thí dụ này ta đặt trục x đi qua trọng tâm C_2 của mặt cắt chữ I cho tiện tính toán.

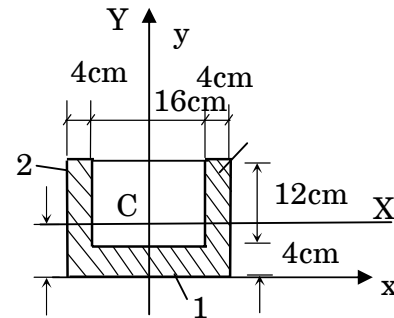
Thí dụ 6.3. Cho mặt cắt hình chữ U .Tìm trọng tâm C

Chọn hệ trục x,y như hình vẽ, trục x qua đáy mặt cắt (trục y là trục đối xứng, C nằm trên trục y)

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{24 \times 4 \times 2 + 2(4 \times 12 \times 10)}{(24 \times 4) + 2(4 \times 12)} = 6\text{cm}$$

Hay :

$$y_C = \frac{S_{x_1} - S_{x_2}}{F_1 - F_2} = \frac{(24 \times 16 \times 8) - (16 \times 12 \times 10)}{(24 \times 16) - (16 \times 12)} = 6\text{cm}$$



H. 6.12

6.3 MÔMEN QUÁN TÍNH- HỆ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM

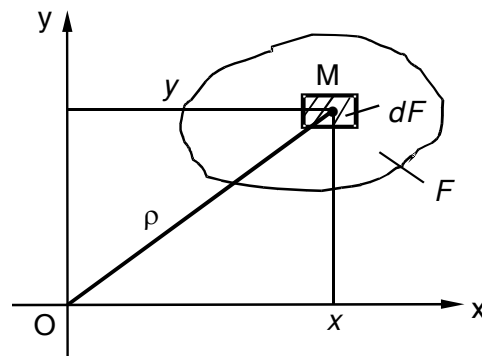
1- Mômen quán tính (MMQT)

♦ Mômen quán tính độc cực

(MMQT đối với điểm) của mặt cắt F đối với điểm O được định nghĩa là biểu thức tích phân:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (6.6)$$

với: ρ - khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ O,



H. 6.6 Hình phẳng F

♦ Mômen quán tính đối với trục

y và x của mặt cắt F được định nghĩa:

$$J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_x = \int_F y^2 dF \quad (6.7)$$

♦ Mômen quán tính ly tâm của mặt cắt F đối với hệ trục x,y được định nghĩa:

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (6.8)$$

Từ định nghĩa các mômen quán tính, ta nhận thấy:

- MMQT có thứ nguyên là $[chiều\ dài]^4$
- $J_x, J_y, J_\rho > 0$
- MMQT ly tâm J_{xy} có thể dương, âm hoặc bằng không.
- Vì $\rho^2 = x^2 + y^2$ nên $J_\rho = J_x + J_y$ (6.9)

Chương 7

UỐN PHẪNG THANH THẲNG

7.1 KHÁI NIỆM CHUNG

♦ Thanh chịu uốn là thanh có **trục bị uốn cong** dưới tác dụng của ngoại lực. Thanh có trục nằm ngang chịu uốn được gọi là **dầm**.

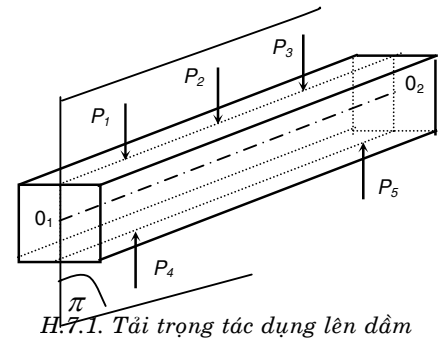
(Thanh có trục thẳng đứng gọi là cột)

♦ **Ngoại lực:** Lực tập trung P , lực phân bố q tác dụng vuông góc với trục dầm hay momen (ngẫu lực)

M nằm trong mặt phẳng chứa trục dầm (H.7.1).

♦ **Mặt phẳng tải trọng:** Mặt phẳng (π) chứa ngoại lực và trục dầm.

Đường tải trọng: Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang.



♦ **Giới hạn bài toán:**

+ Chỉ khảo sát các thanh mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng.

Trục đối xứng này và trục thanh hợp thành mặt phẳng đối xứng.

Tải trọng nằm trong mặt phẳng đối xứng.

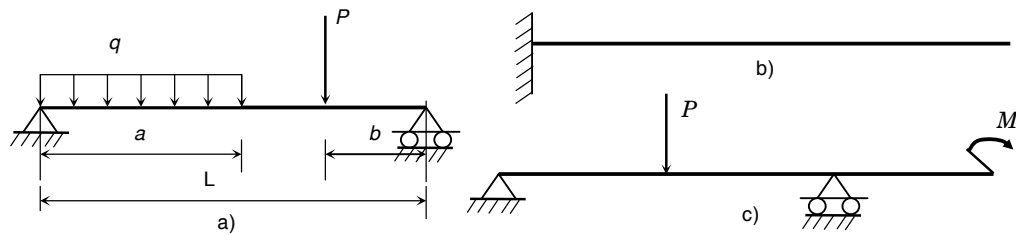
Mặt phẳng tải trọng trùng mặt phẳng đối xứng,

Đường tải trọng cũng là trục đối xứng của mặt cắt ngang

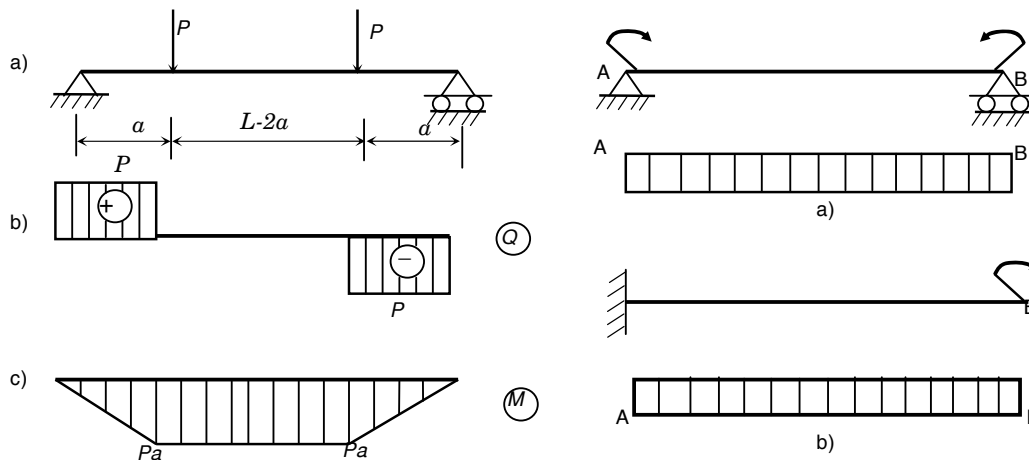
Trục dầm sau khi bị cong vẫn nằm trong mặt phẳng (π) được gọi là **uốn phẳng**.

+ Mặt cắt ngang dầm có chiều rộng bé so với chiều cao.

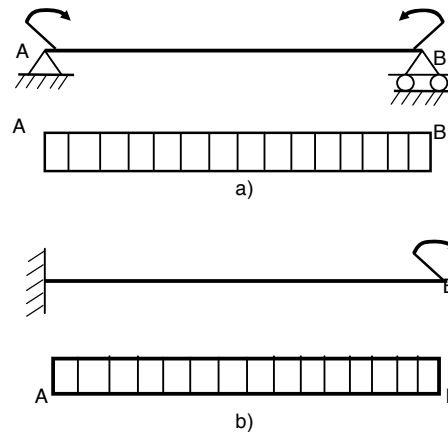
♦ H.7.3 ,7.4,7.5 : giới thiệu một số loại dầm đơn giản thường gặp



H.7.3. Các loại dầm: a) Dầm đơn giản
b) Dầm chèn kẹp; c) Dầm có đầu mút thừa



H.7.4. Dầm với vùng ở giữa chịu uốn thuần túy



H.7.5. Dầm chịu uốn thuần túy

♦ **Nội lực:** Tùy theo ngoại lực tác dụng mà trên mặt cắt ngang dầm có các nội lực là **lực cắt Q_y** và **mômen uốn M_x** .

♦ **Phân loại:**

Uốn thuần túy phẳng: Nội lực chỉ có mômen uốn M_x =hằng số.

Uốn ngang phẳng: Nội lực gồm lực cắt Q_y và mômen uốn M_x

♦ Dầm ở H.7.4 có đoạn giữa CD chịu uốn thuần túy, dầm ở H. 7.5 chịu uốn thuần túy. Đoạn dầm AC và DB của dầm ở H.7.4 chịu uốn ngang phẳng.

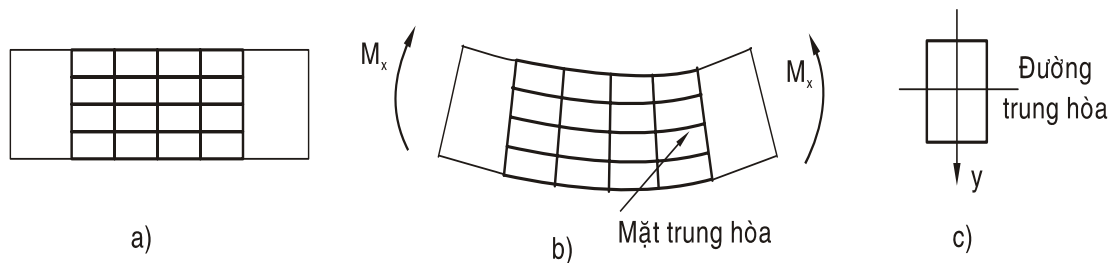
7.2 UỐN THUẦN TÚY PHẪNG

7.2.1 Định nghĩa: Thanh chịu uốn thuần túy phẳng khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một nội lực M_x .

Dấu của M_x : $M_x > 0$ khi căng (kéo) thớ dưới (thớ $y > 0$) của dầm

7.2.2 Tính ứng suất trên mặt cắt ngang:

1. Thí nghiệm và quan sát biến dạng:



H.7.6. a) Thanh trước khi biến dạng
b) Sau biến dạng; c) Mặt cắt ngang sau biến dạng

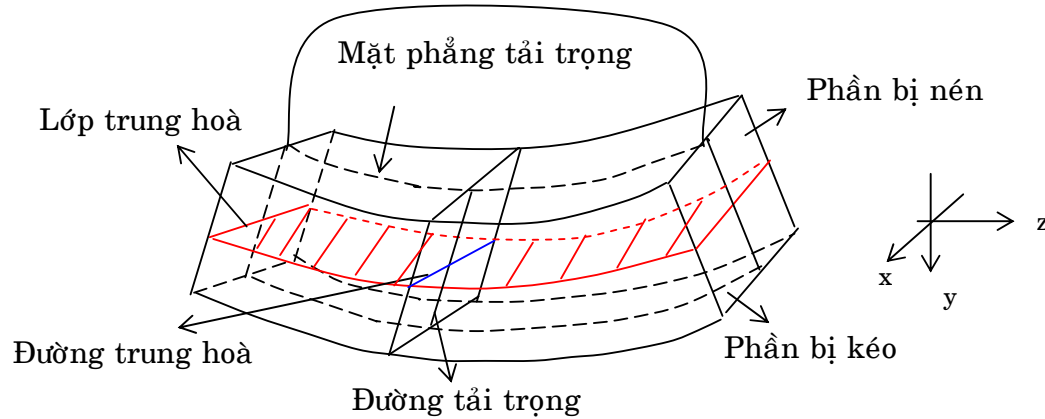
H. 7.6 a) Thanh trước khi biến dạng

b) Sau biến dạng; c) Mặt cắt ngang sau biến dạng

Kẻ lên mặt ngoài một thanh thẳng chịu uốn như H.7.6a, những đường song song với trục thanh tượng trưng cho các thớ dọc và những đường vuông góc với trục thanh tượng trưng cho các mặt cắt ngang; các đường này tạo thành các lưới ô vuông (H.7.6a).

Sau khi biến dạng (H.7.6b), trục thanh bị cong, các đường thẳng song song với trục thanh thành các đường cong song song với trục thanh; những đường vuông góc với trục thanh vẫn còn vuông góc với trục thanh, nghĩa là các **góc vuông được bảo toàn** trong quá trình biến dạng.

Ngoài ra, nếu quan sát thanh thì thấy các thớ bên dưới dãn ra (*bi kéo*) và các thớ bên trên co lại (*bi nén*). Như thế, từ thớ bị dãn sang thớ bị co sẽ tồn tại các thớ mà chiều dài không thay đổi trong quá trình biến dạng, gọi là **thớ trung hòa**. Các thớ trung hòa tạo thành **lớp trung hòa**. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang tạo thành **đường trung hòa**. Vì mặt cắt ngang có chiều rộng bé nên đường trung hòa xem như thẳng (H.7.6.c)

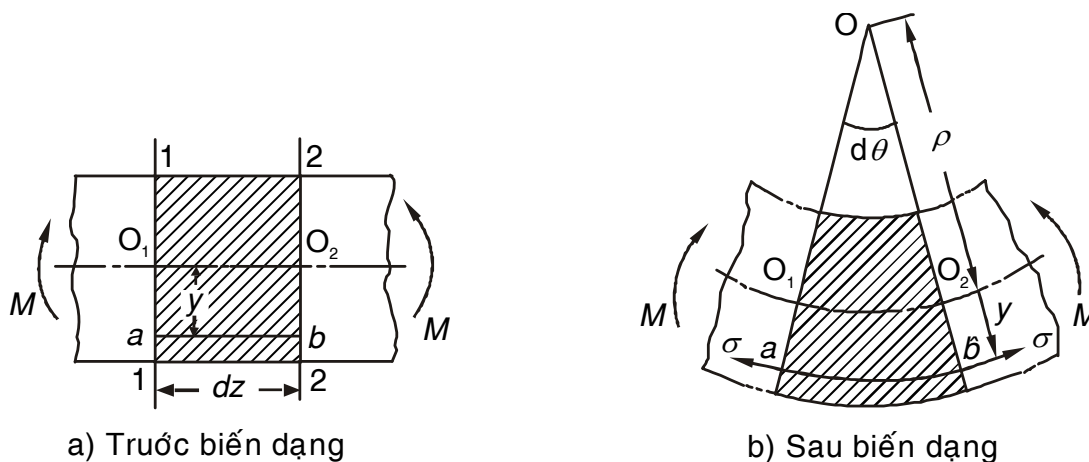


Sau biến dạng các mặt cắt ngang 1-1 và 2-2 ban đầu cách nhau một đoạn vi phân dz sẽ cắt nhau tại tâm cong O' (H.7.7b) và hợp thành một góc $d\theta$. Gọi ρ là bán kính cong của thớ trung hòa, tức khoảng cách từ O' đến thớ trung hòa. Độ dãn dài tương đối của một thớ ab ở cách thớ trung hòa một khoảng cách y cho bởi:

$$\varepsilon_z = \frac{ab - 0_10_2}{0_10_2} = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (a)$$

trong đó: κ - là độ cong của dầm.

Hệ thức này chứng tỏ biến dạng dọc trục dầm tỉ lệ với độ cong và biến thiên tuyến tính với khoảng cách y từ thớ trung hòa



H.7.7 Đoạn dầm vi phân dz

2. Thiết lập công thức tính ứng suất:

Mỗi thớ dọc của dầm chỉ chịu kéo hoặc nén (các điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang ở trạng thái ứng suất đơn).

Định luật Hooke ứng với trạng thái ứng suất đơn cho ta:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\kappa y \quad (b)$$

Ứng suất pháp tác dụng trên mặt cắt ngang biến thiên bậc nhất với khoảng cách y từ trục trung hoà.

Xét hợp lực của các ứng suất pháp trên toàn mặt cắt ngang.

+ Liên hệ giữa σ_z và N_z

$$\int_F \sigma_z dF = \int_F E\kappa y dF = 0 \quad (\text{định nghĩa } N_z = 0) \quad (c)$$

Vì độ cong κ và mô đun đàn hồi E là hằng số nên có thể đem ra ngoài dấu tích phân, $\Rightarrow \int_F y dF = 0 \quad (d)$

(d) cho thấy mômen tĩnh của diện tích mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x bằng không $\Leftrightarrow$ **trục trung hoà x đi qua trọng tâm mặt cắt ngang.**

Tính chất này cho phép xác định trục trung hoà của bất kỳ mặt cắt ngang nào. **Nếu trục y là trục đối xứng, thì hệ trục (x,y) chính là hệ trục quán tính chính trung tâm.**

+ Liên hệ giữa σ_z và M_x

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \kappa E \int_F y^2 dF = \kappa E J_x \quad (e)$$

trong đó: $J_x = \int_F y^2 dF \quad (g)$

là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x .

Biểu thức (e) được viết lại như sau:

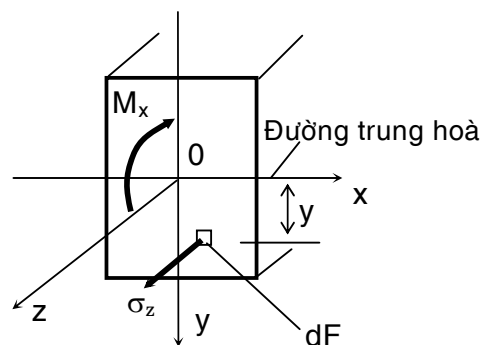
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \quad (7.1)$$

EJ_x gọi là **độ cứng uốn** của dầm.

Thế (7.1) vào (b) $\Rightarrow$ Công thức tính ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt

ngang dầm: $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (7.2)$

Ứng suất biến thiên bậc nhất theo tung độ y . và y là khoảng cách của điểm tính ứng suất kể từ trục trung hoà x . (M_x và y mang dấu đại số)



H.7.8. Ứng suất pháp và mômen uốn trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn

Công thức kỹ thuật:

Nếu mômen uốn dương, dầm bị căng (bị kéo) ở dưới, các thớ trên bị nén . Kết quả ngược lại nếu mômen uốn âm. Do vậy trong thực hành, ta có thể sử dụng công thức kỹ thuật để tính ứng suất,

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \quad (7.3)$$

ta sẽ lấy: dấu (+) nếu M_x gây **kéo** tại điểm cần tính ứng suất.

dấu (-) nếu M_x gây **nén** tại điểm cần tính ứng suất.

7.2.3 Biểu đồ ứng suất pháp - Ứng suất pháp cực trị:**♦ Biểu đồ ứng suất pháp:**

+Những điểm càng ở xa trục trung hòa có trị số ứng suất càng lớn.

+Những điểm cùng có khoảng cách tới trục trung hòa sẽ có cùng trị số ứng suất pháp.

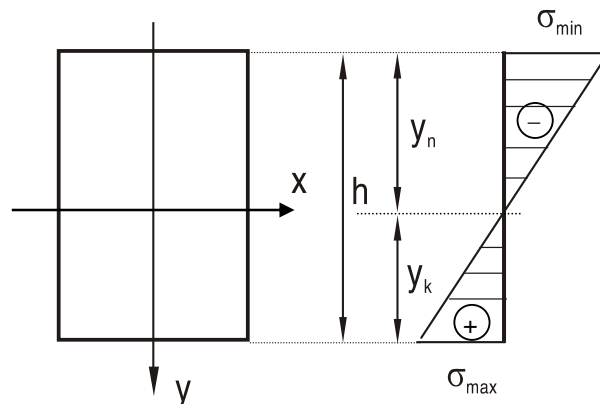
Biểu đồ phân bố ứng suất pháp là đồ thị biểu diễn giá trị các ứng suất tại các điểm trên mặt cắt ngang.

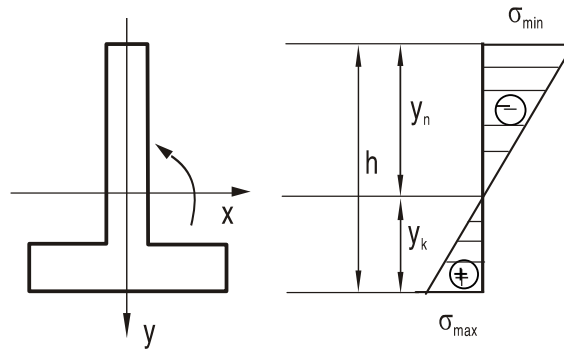
*Trường hợp mặt cắt ngang có hai trục đối xứng (Hình tròn, chữ nhật..) cho bởi H.7.9

*Trường hợp mặt cắt ngang chỉ có một trục đối xứng (chữ I,U) cho bởi H.7.10.

Dấu (+) chỉ ứng suất kéo.

Dấu (-) chỉ ứng suất nén.



H. 7.9 Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có hai trục đối xứng**H. 7.10** Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có một trục đối xứng**♦ Ứng suất pháp cực trị:**

Tính ứng suất pháp khi kéo và khi nén lớn nhất trên mặt cắt ngang dầm ở những điểm xa đường trung hòa nhất.

Gọi $y_{\max}^k$, $y_{\max}^n$ lần lượt là khoảng cách thớ chịu kéo và thớ chịu nén ở xa đường trung hòa nhất. Khi đó ứng suất chịu kéo lớn nhất $\sigma_{\max}$ và ứng suất chịu nén lớn nhất $\sigma_{\min}$ sẽ tính bởi các công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k} \quad (7.4a)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = \frac{|M_x|}{W_x^n} \quad (7.4b)$$

với:

$$W_x^k = \frac{J_x}{|y_{\max}^k|}; \quad W_x^n = \frac{J_x}{|y_{\max}^n|} \quad (7.5)$$

Các đại lượng W_x^k và W_x^n gọi là các suất tiết diện hoặc **mômen chống uốn** của mặt cắt ngang.

Trường hợp đặc biệt: Nếu trục x (trục trung hoà) cũng là trục đối xứng (mặt cắt chữ nhật, tròn, I,...) thì:

$$|y_{\max}^k| = |y_{\max}^n| = \frac{h}{2}$$

$$\text{khi đó:} \quad W_x^k = W_x^n = W_x = \frac{2J_x}{h} \quad (7.6)$$

và ứng suất nén và kéo cực đại có trị số bằng nhau:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (7.7)$$

* Mặt cắt ngang hình chữ nhật với bề rộng b và chiều cao h :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (7.8)$$

* Mặt cắt ngang hình tròn:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (7.9)$$

* Mặt cắt ngang hình vành khăn : đường kính ngoài D, trong, d

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}(1-\eta^4); \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1-\eta^4) \quad \text{với} \quad \eta = d/D$$

* Mặt cắt ngang hình I, C: Tra bảng thép định hình.

Ý nghĩa vật lý của mômen chống uốn: **khi mômen chống uốn càng lớn dầm chịu được mômen uốn càng lớn.**

7.2.4 Điều kiện bền- Ba bài toán cơ bản

Điều kiện bền:

+ Dầm bằng vật liệu giòn: $[\sigma]_k \neq [\sigma]_n$

$$\begin{aligned} |\sigma_{\min}| &\leq [\sigma]_n \\ \sigma_{\max} &\leq [\sigma]_k \end{aligned} \quad (7.10a)$$

+ Dầm bằng vật liệu dẻo: $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$

$$\max |\sigma_z| \leq [\sigma] \quad (7.10b)$$

Ba bài toán cơ bản:

+ Bài toán kiểm tra bền, (*Đây là bài toán thẩm kế.*)

+ Bài toán chọn kích thước mặt cắt ngang, (*bài toán thiết kế.*)

+ Bài toán chọn tải trọng cho phép. (*bài toán sửa chữa, nâng cấp*)

Bài toán cơ bản 1: Kiểm tra bền- Kiểm tra thanh chịu lực có đảm bảo độ bền hay không. Dùng (7.10a) hay (7.10b) để kiểm tra.

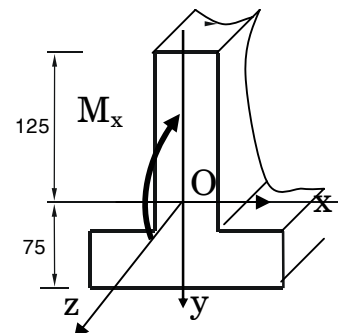
Thí dụ 7.1 Trên mặt cắt ngang của một dầm chữ T ngược (H.7.11), mômen uốn $M_x = 7200 \text{ Nm}$. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và nén khác nhau:

- $[\sigma]_k = 20 \text{ MN/m}^2; \quad [\sigma]_n = 30 \text{ MN/m}^2$
- Kiểm tra bền biết rằng: $J_x = 5312,5 \text{ cm}^4$

Giải.

Ta có: $y_{\max}^k = 75 \text{ mm} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$y_{\max}^n = 125 \text{ mm} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$



Dầm chữ T chịu uốn

$$W_x^k = \frac{J_x}{y_{\max}^k} = \frac{5312,5 \times 10^{-8}}{7,5 \times 10^{-2}} = 708,3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_x^n = \frac{J_x}{y_{\max}^n} = \frac{5312,5 \times 10^{-8}}{12,5 \times 10^{-2}} = 425 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{7200}{708,3 \times 10^{-6}} = 10,20 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 10,20 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_k]$$

$$|\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{7200}{425 \times 10^{-6}} = 17 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 17 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_n]$$

vậy dầm đủ bền.

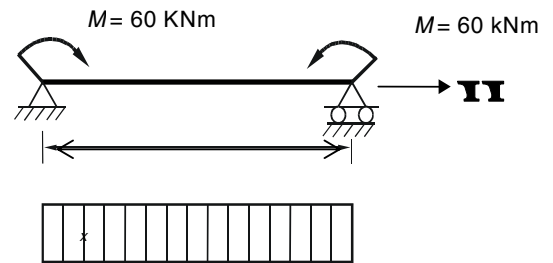
Bài toán cơ bản 2: Chọn kích thước mặt cắt ngang sao cho dầm thỏa điều kiện bền.

Từ điều kiện bền tổng quát (7.10a,b) $\Rightarrow$ mômen chống uốn và kích thước của mặt cắt ngang sẽ được xác định.

Thí dụ 7.2 Cho dầm chịu lực như H.7.12. Dầm làm bằng hai thép chữ $\mathbf{x}$, Chọn số hiệu của thép chữ $\mathbf{x}$ để dầm thỏa điều kiện bền. Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

Dầm chịu uốn thuần túy; trên mọi mặt cắt ngang của dầm có mômen uốn $M_x = 60 \text{ kNm}$.



H.7.12

Áp dụng công thức (7.7) và (7.10b) ta được: $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 100}{16} = 375 \text{ cm}^3$

Tra bảng thép hình ta chọn 2 $\mathbf{x}$ 20 có $W_x = 2 \times 184 = 368 \text{ cm}^3$.

Kiểm tra lại điều kiện bền ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 100}{368} = 16,3 \text{ kN/cm}^2$$

sai số tương đối: $\frac{16,3 - 16}{16} \times 100\% = 1,9\%$; vậy dầm đủ bền. Chọn 2 $\mathbf{x}$ 20

Bài toán cơ bản 3: **Định tải trọng cho phép [P] để dầm thỏa điều kiện bền.**

Thí dụ 7.3 Một dầm bằng gang có mặt cắt ngang như H.7.13. Xác định trị số mômen uốn cho phép (mômen có chiều như hình vẽ). Biết: $[\sigma]_k = 1,5 \text{ kN/cm}^2$.

Hỏi với trị số mômen uốn cho phép đó, ứng suất nén lớn nhất trong dầm là bao nhiêu?

Cho biết $J_x = 25470 \text{ cm}^4$

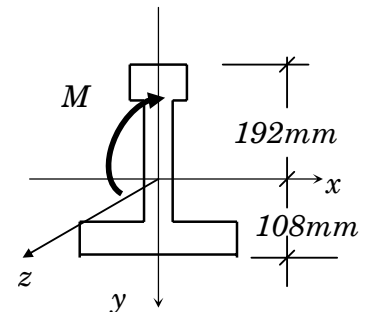
Giải.

Từ điều kiện bền $\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k} \leq [\sigma]_k$

$$\Rightarrow [M_x] = [\sigma_k] \frac{J_x}{y_{\max}^k} = 1,5 \times \frac{25470}{10,8} = 3537,5 \text{ kNcm}$$

Tương ứng ta có:

$$\sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = -\frac{3537,5}{25470} \times 19,2 = -2,67 \text{ kN/cm}^2$$

**H.7.13****7.2.5 Hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang.**

Hình dáng hợp lý là sao cho khả năng chịu lực của dầm là lớn nhất nhưng đồng thời ít tốn vật liệu nhất. Điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = |\sigma|_k, \quad |\sigma|_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = |\sigma|_n$$

Lập tỉ số các ứng suất :

$$\frac{|y_{\max}^k|}{|y_{\max}^n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \alpha$$

- Nếu vật liệu dẻo: $\alpha < 1$ vì : $|\sigma|_k < |\sigma|_n$ nên $|y_{\max}^k| < |y_{\max}^n|$

Ta chọn mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hoà.

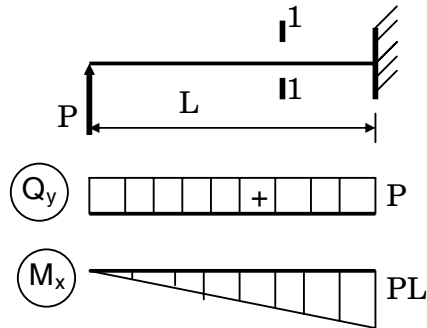
- Nếu vật liệu giòn: $\alpha = 1$ nên $|y_{\max}^k| = |y_{\max}^n|$

Ta chọn mặt cắt ngang đối xứng qua trục trung hoà.

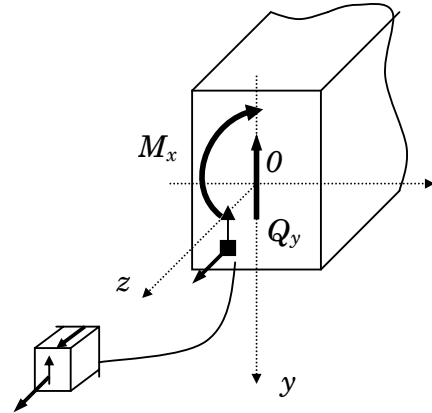
Theo biểu đồ ứng suất ta thấy càng gần trục trung hoà ứng suất càng nhỏ, nên tại đó vật liệu làm việc ít hơn ở những điểm xa trục trung hoà, vì vậy thường cấu tạo hình dáng mặt cắt sao cho vật liệu xa trục trung hoà . ví dụ hình chữ I,U,vành khăn ,hình rỗng...

7.3 UỐN NGANG PHẪNG

7.3.1 Định nghĩa- Dầm gọi là chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang có 2 nội lực là: mômen uốn M_x và lực cắt Q_y (H 7.14).



H.7.14. Số đồ dầm chịu uốn ngang

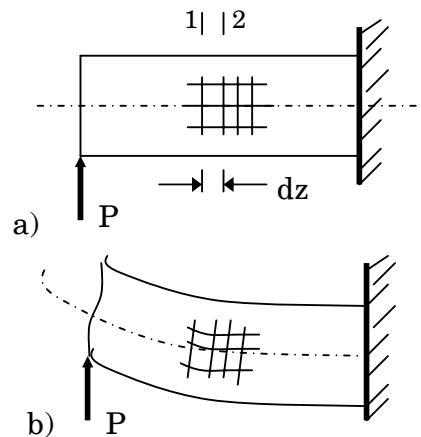


H.7.15 Mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng

7.3.2 Các thành phần ứng suất:

1- Thí nghiệm và quan sát biến dạng

Kẻ những đường song song và vuông góc với trục thanh (H.7.16a). Sau biến dạng các góc vuông không còn vuông (H.7.16b).



H. 7.16. a) Thanh trước biến dạng
b) Thanh sau biến dạng
c) Trạng thái ứng suất phẳng

2- Trạng thái ứng suất:

Khác với trường hợp uốn thuần túy, ngoài ứng suất pháp σ_z do mômen M_x gây ra còn có ứng suất tiếp τ_{zy} do lực cắt Q_y gây ra. Trạng thái ứng suất của một phân tố có các mặt song song các trục tọa độ biểu diễn như hình 7.15 và 7.16c

3. Công thức tính ứng suất pháp:

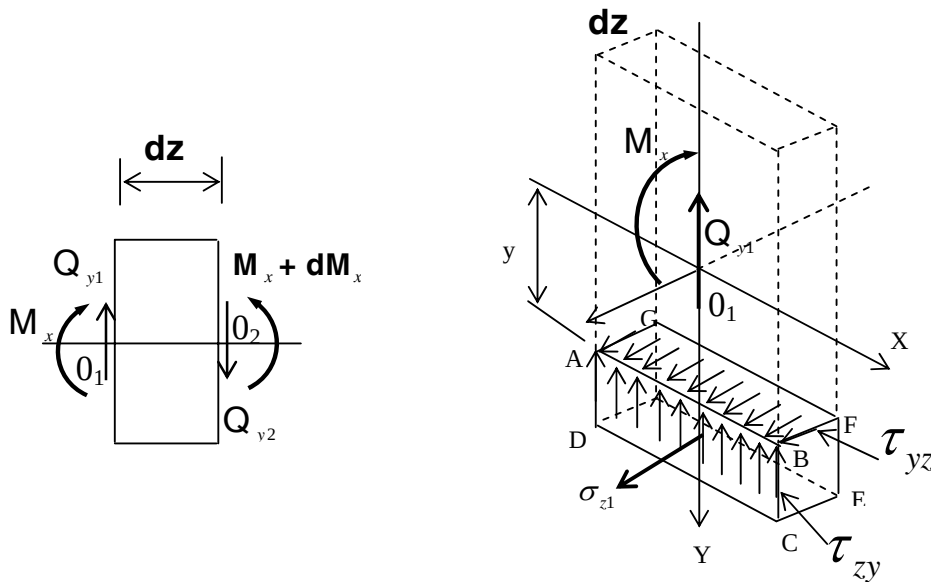
Chấp nhận với sai số không lớn dùng công thức (7.2) để tính ứng suất pháp trong thanh chịu uốn ngang phẳng.(Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (7.2)$$

4. Công thức tính ứng suất tiếp:

Giả thiết:

- Mặt cắt ngang dầm có chiều rộng bé so với chiều cao.
- Ứng suất tiếp phân bố đều theo bề rộng của mặt cắt và cùng chiều với lực cắt (nghĩa là mọi điểm nằm cách đều đường trung hòa thì có cùng trị số ứng suất tiếp).



Ta xác định quy luật phân bố ứng suất tiếp dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang.

Xét đoạn dầm giới hạn bởi 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 cách nhau dz (H.7.17a). Để khảo sát ứng suất tiếp tại điểm K cách đường trung hòa x một khoảng y , ta dùng mặt cắt đi qua K vuông góc với lực cắt.

Xét cân bằng của phần dưới ABCDEFGH (H.7.17b)

Theo các giả thiết đã nêu, các ứng suất tiếp τ_{zy} thẳng đứng có phương song song với lực cắt thì phân bố đều trên mặt thẳng đứng ABCD. Ngoài ra theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp , trên mặt vuông góc với mặt cắt ngang ABFE cũng có ứng suất tiếp τ_{yz} có giá trị bằng với τ_{zy} (H.7.17b).

Như vậy, tồn tại ứng suất tiếp theo phương ngang giữa các lớp song song với trục dầm cũng như các ứng suất tiếp thẳng đứng trên các mặt cắt ngang của dầm. Tại một điểm, các ứng suất này có giá trị bằng nhau.

Phương trình cân bằng theo phương **z** dọc trục thanh cho:

$$N_1 - N_2 + T = 0 \quad (a)$$

trong đó: N_1 - là hợp của các lực tác dụng trên mặt 1-1 được tính bởi:

$$N_1 = \int_{F_c} \sigma_{z1} dF = \int_{F_c} \frac{M}{J_x} y dF \quad (b)$$

N_2 - là hợp của các lực tác dụng trên mặt 2-2 được tính bởi:

$$N_2 = \int_{F_c} \sigma_{z2} dF = \int_{F_c} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF \quad (c)$$

T - là hợp của các lực tác dụng trên mặt trên ABEF của phần tử:

$$T = \tau_{yz} b^c dz \quad (d)$$

Thay (b), (c), (d) vào (a) $\Rightarrow$

$$\int_{F_c} \frac{M_x}{J_x} y dF - \int_{F_c} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF + \tau_{yz} b^c dz = 0 \quad (e)$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \left(\frac{1}{J_x b^c} \right) \int_{F_c} y dF \quad (f)$$

thay $Q_y = dM_x/dz$ ta được:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y}{J_x b^c} \int_{F_c} y dF \quad (g)$$

$$\text{Đặt: } S_x^c = \int_{F_c} y dF \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} \quad (7.11)$$

Công thức (7.11) gọi là công thức **D.I. Zhuravski**

S_x^c : momen tĩnh của phần diện tích bị cắt (F_c) đối với trục trung hòa.

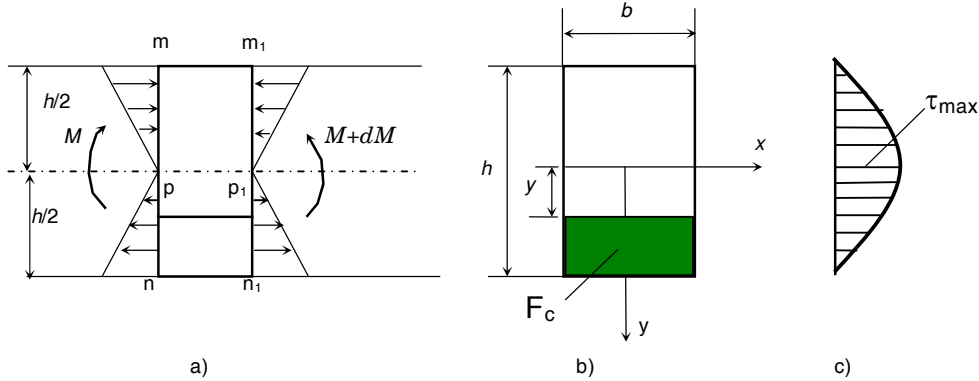
b^c : bề rộng tiết diện cắt.

J_x : Momen quán tính của tiết diện.

Q_y : Lực cắt tại tiết diện đang tính.

5-Phân bố ứng suất tiếp trên một số mặt cắt thường gặp:

+ Mặt cắt ngang chữ nhật (H.7.18):



H.7.18. Phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ nhật

Diện tích bị cắt F_c là hình chữ nhật, nên

$$S_x^c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (i)$$

$$\text{Thay vào (7.11)} \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{Q_y}{2J_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.12)$$

Hệ thức này chứng tỏ ứng suất tiếp trong dầm tiết diện chữ nhật biến thiên theo quy luật bậc hai theo khoảng cách y từ trục trung hòa và biểu đồ theo chiều cao của dầm có dạng như trên H.7.18c.

$\tau_{zy} = 0$ khi $y = \pm h/2$ (các điểm ở biên trên, dưới của mặt cắt)

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} \quad (7.13)$$

trong đó: $F = bh$ - là diện tích của mặt cắt ngang.

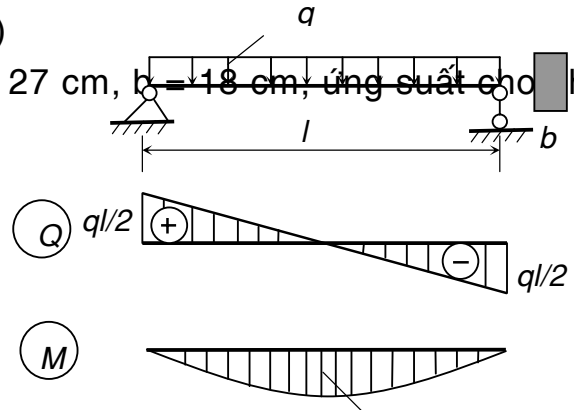
Thí dụ 7.4 Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại trên dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật $b \times h$ (H. 7.19)

Cho biết: $q = 12 \text{ kN/m}$, $l = 4 \text{ m}$; $h = 27 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$; ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,1 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 0,22 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

Mômen cực đại ở giữa dầm:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{12 \times 4 \times 4 \times 10^2}{8} = 2400 \text{ kNcm}$$



Lực cắt cực đại ở hai gối tựa:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{12 \times 4}{2} = 24 \text{ kN}$$

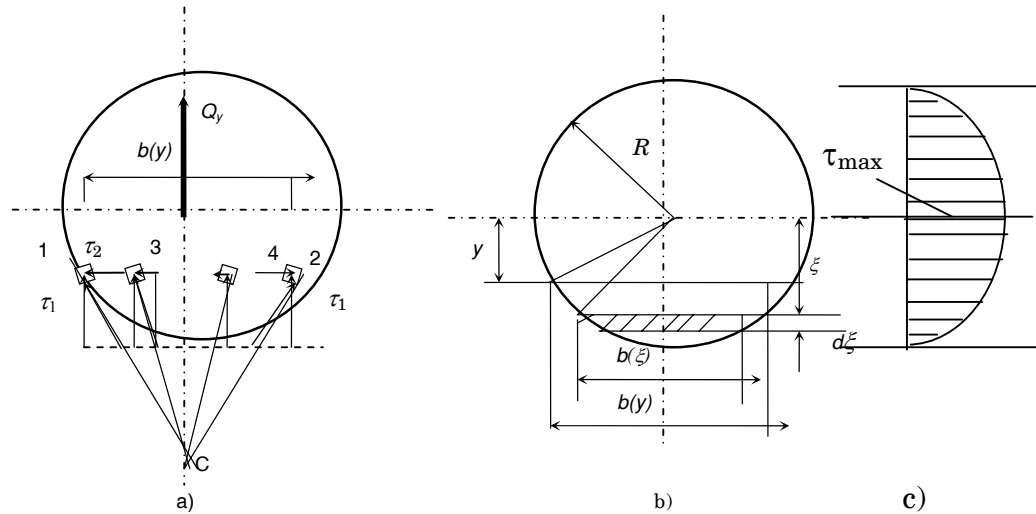
Ứng suất cực đại:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2400 \times 6}{18 \times 27^2} = 1,095 \text{ kN/cm}^2 < 1,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2bh} = \frac{3 \times 24}{2 \times 18 \times 27} = 0,075 \text{ kN/cm}^2 < 0,22 \text{ kN/cm}^2$$

H.7.19

+ Mặt cắt ngang hình tròn và hình vành khăn (H.7.20)



H.7.20. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang hình tròn

Khi dầm có mặt cắt ngang là hình tròn, ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang không còn song song với lực cắt nữa. Nếu không có lực tác dụng trên mặt ngoài của dầm, ứng suất tiếp trên hai diện tích vi phân tại các điểm 1 và 2 trên vùng sát chu vi của mặt cắt ngang phải hướng theo phương tiếp tuyến với chu vi này (H.7.20a).

Các tiếp tuyến này có phương đồng quy tại điểm C trên phương tác dụng của lực cắt. Bởi vì lực cắt Q_y là hợp của các ứng suất tiếp (H.7.20), nên các ứng suất tiếp tại các diện tích vi phân tại 3 và 4 có cùng khoảng cách y tới trục trung hòa sẽ có phương đi ngang điểm C.

Mỗi ứng suất tiếp này có thể phân thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng τ_1 , và nằm ngang τ_2 . Các thành phần nằm ngang tác dụng trên hai phần trái và phải sẽ tự cân bằng nhau do tính đối xứng, trong khi các thành phần thẳng đứng hợp lại thành lực cắt Q_y .

Như vậy, trong dầm có mặt cắt ngang tròn, thành phần τ_1 sẽ đóng vai trò của τ trong dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật.

Mômen tĩnh của phần diện tích giới hạn bởi biên dưới mặt cắt ngang và mặt cắt song song với mặt trung hòa ở khoảng cách y từ trục trung hòa x cho bởi:

$$S_x^c = \int_{F_c} \xi dF = \int_{F_c} \xi b(\xi) d\xi \quad (j)$$

ta có: $b^c = b(\xi) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ (k)

trong đó: R - là bán kính của hình tròn mặt cắt ngang.

Do vậy: $S_x^c = \int_y^R 2\sqrt{R^2 - y^2} \xi d\xi = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$ (l)

và thành phần ứng suất tiếp theo phương thẳng đứng có trị số:

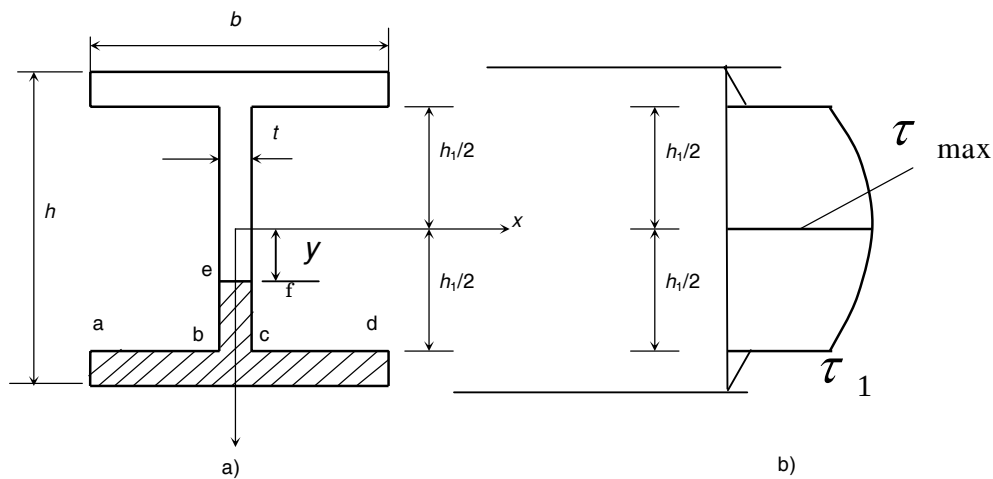
$$\tau_{zy} = \frac{4 Q_y}{3 F} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad (7.14)$$

$\tau_{zy} = 0$ khi $y = \pm h/2$ (các điểm ở biên trên, dưới của mặt cắt)

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_y}{3 F}, (F: \text{diện tích hình tròn}) \quad (7.15)$$

+ Mặt cắt ngang hình chữ I, hay chữ T



H.7.17. Ứng suất tiếp trong lòng của dầm chữ I

Các mặt cắt ngang chữ **I** hay chữ **T** được xem như cấu tạo bởi các hình chữ nhật ghép nên với mức độ chính xác nhất định, các công thức dùng cho dầm mặt cắt ngang chữ nhật cũng dùng được cho các loại mặt cắt này. Ứng suất tiếp được tính bằng công thức Zhuravski : $\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$

♦ **τ_{zy} trong bản bụng:** Xét điểm có tung độ y (H.7.21a)

b^c chính là bề rộng bản bụng: $b^c = d$

S_x^c là mômen tĩnh của phần diện tích gạch chéo dưới mức ef đối với trục trung hòa x. S_x^c có thể tính bằng mômen tĩnh của nửa hình I (trong bảng ghi là S_x) trừ mômen tĩnh của phần diện tích ($y \times d$)

$$S_x^c = S_x - (d \times y \times \frac{y}{2}) \quad (o)$$

⇒ Ứng suất tiếp τ_{zy} trong bản bụng của dầm chữ I là

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x d} \left[S_x - (d \times \frac{y^2}{2}) \right] \quad (p)$$

(p) chỉ rằng ứng suất tiếp trong bản bụng của dầm chữ **I** biến thiên theo quy luật parabol dọc theo chiều cao của dầm.

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{J_x d} S_x \quad (7.17)$$

$\tau_{zy} = \tau_1$ khi $y = \frac{h}{2} - t = h_1$ (điểm tiếp giáp giữa bụng và cánh). τ_1 khá lớn

và:
$$\tau_1 = \frac{Q_y}{J_x d} \left(S_x - d \times \frac{h_1^2}{2} \right) \quad (7.18)$$

♦ **τ_{zy} trong bản cánh:** Xét một điểm trong bản cánh, bề rộng cắt $b^c = b$ khá lớn so với d , nên τ_{zy} trong cánh bé, có thể bỏ qua (H.7.21)

♦ **τ_{zx} trong bản cánh:** Xét một điểm trong cánh (H7.21), $b^c = t$

$$S_x^c = t \times \left(\frac{b}{2} - x \right) \times \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \frac{Q_y \times \left(\frac{b}{2} - x \right) \times \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{J_x} \quad (7.19)$$

Ứng suất tiếp τ_{zx} phân bố bậc nhất theo x , biểu đồ phân bố như H.7.21

Thí dụ 7.5 Tính ứng suất tiếp ở các điểm trên trục trung hoà trong thân của dầm chữ **T** có mặt cắt ngang như trên H.7.22 . Cho $b = 8 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $h = 16 \text{ cm}$, $h_1 = 14 \text{ cm}$, và $Q = 20 \text{ kN}$.

Giải

Khoảng cách c tới trọng tâm của mặt cắt ngang được xác định bởi:

$$c = \frac{8 \times 2 \times 1 + 14 \times 2 \times 9}{8 \times 2 + 14 \times 2} = 6,09 \text{ cm}$$

Mômen quán tính J_x của mặt cắt ngang:

$$J_x = \frac{8 \times 2^3}{12} + 8 \times 2 \times (6,09 - 1)^2 + \frac{2 \times 14^3}{12} + 14 \times 2 \times (9 - 6,09)^2 = 1144,3 \text{ cm}^4$$

+ Ứng suất tiếp ở các điểm trên trục trung hoà:

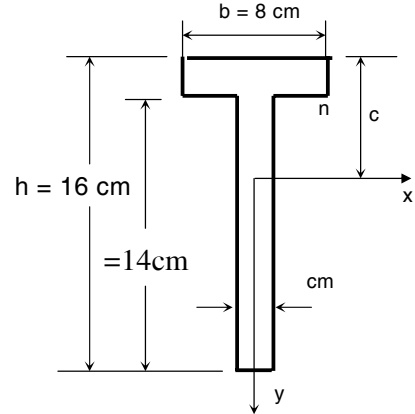
$$b_c = 2 \text{ cm}$$

Mômen tĩnh của phần diện tích dưới trục trung hoà đối với trục này là:

$$S_x^c = \frac{2 \times (16 - 6,09)^2}{2} = 98,208 \text{ cm}^3 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{20 \times 98,208}{1144,3 \times 2} = 0,858 \text{ kN/cm}^2$$

+ Ứng suất tiếp ở các điểm tiếp giáp cánh và bụng : $b_c = 2 \text{ cm}$

$$S_x^c = 2 \times 8 \times (6,09 - 1) = 81,44 \text{ cm}^3 \Rightarrow \tau_1 = \frac{20 \times 81,44}{1144,3 \times 2} = 0,712 \text{ kN/cm}^2$$



H.7.22

7.4 KIỂM TRA BỀN DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn ngang phẳng có 2 ứng suất:

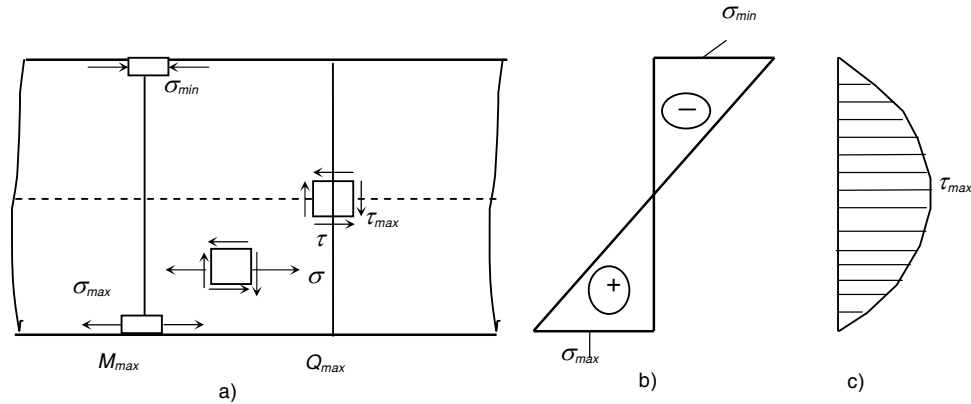
- Ứng suất pháp σ_z do mômen uốn M_x gây ra.
- Ứng suất tiếp τ_{zy} do lực cắt Q_y gây ra.

Biểu đồ phân bố ứng suất pháp và ứng suất tiếp theo chiều cao của mặt cắt ngang hình chữ nhật (H.7.23b,c), ta thấy có ba loại phân bố ở trạng thái ứng suất khác nhau (H.7.23a):

- Những điểm ở biên trên và dưới $\tau = 0$, chỉ có $\sigma_z \neq 0$ nên trạng thái ứng suất của các phân bố ở những điểm này là **trạng thái ứng suất đơn**

- Những điểm nằm trên trục trung hoà $\sigma_a = 0$, chỉ có $\tau_{\max}$ nên trạng thái ứng suất của những phân bố ở những điểm này là **trượt thuần túy**.

- Các điểm khác, $\sigma_z \neq 0$ và $\tau_{zy} \neq 0$, nên chúng ở **trạng thái ứng suất phẳng đặt biệt**.



H. 7.23 a) Các phân tố ở trạng thái ứng suất khác nhau
b) Sự phân bố ứng suất pháp; c) Sự phân bố ứng suất tiếp

$\Rightarrow$ Khi kiểm tra bền toàn dầm, phải bảo đảm mọi phân tố đều thỏa điều kiện bền. (đủ 3 điều kiện bền)

a) Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn (những điểm ở trên biên trên và dưới của dầm), xét tại mặt cắt có $|M|_{max}$ và sử dụng thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất ta có:

+ Dầm làm bằng vật liệu dẻo, $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, điều kiện bền:

$$\max|\sigma| \leq [\sigma] \quad (7.20)$$

+ Dầm làm bằng vật liệu giòn, $[\sigma_k] \neq [\sigma_n]$, điều kiện bền :

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &\leq [\sigma_k] \\ |\sigma_{min}| &\leq [\sigma_n] \end{aligned} \quad (7.21)$$

b) Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy (những điểm nằm trên trục trung hòa), xét tại mặt cắt có $|Q_y|_{max}$ ta có $\tau_{max} = \frac{|Q_y|_{max} \cdot S_x}{J_x \cdot b^c} \leq [\tau]$

+ Dầm bằng vật liệu dẻo:

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (TB 3): $\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (7.22)$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (TB 4):

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (7.23)$$

+ Dầm bằng vật liệu dòn: sử dụng thuyết bền Mohr (TB 5):

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{1+m} \quad (7.24)$$

trong đó: $m = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]}$ (7.25)

c) Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt:

-Xét tại mặt cắt có mômen uốn M_x và lực cắt Q_y cùng lớn, (có thể nhiều mặt cắt).

-Chọn điểm nguy hiểm trên mặt cắt để có σ_z và τ_{zy} tương đối lớn (chỉ cần kiểm tra tại những nơi nguy hiểm như nơi tiếp giáp giữa lòng và đế của mặt cắt chữ I, chữ C...)chỗ thay đổi tiết diện. Các ứng suất của phân tố này được tính bởi các công thức quen thuộc:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad \text{và} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c}$$

-Tính ứng suất chính của phân tố. $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Điều kiện bền (chương 5):

+ Dầm làm bằng vật liệu dẻo:

Theo TB 3: (7.26) $\sigma_{t3} = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$

Theo TB 4: $\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$ (7.27)

+ Dầm làm bằng vật liệu dòn: Dùng TB 5

$$\sigma_{t5} = \frac{1-m}{2} \sigma_z + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (7.28)$$

Từ đây cũng có **ba bài toán cơ bản**:

Bài toán cơ bản 1: Kiểm tra bền

Bài toán cơ bản 2: Chọn kích thước mặt cắt ngang

Dựa vào điều kiện bền của phân tố ở **trạng thái ứng suất đơn** để chọn sơ bộ kích thước mặt cắt ngang dầm. Sau đó, tiến hành kiểm tra bền đối với các phân tố ở trạng thái ứng suất khác. Nếu không đạt thì thay đổi kích thước mặt cắt ngang.

Bài toán cơ bản 3: Định tải trọng cho phép.

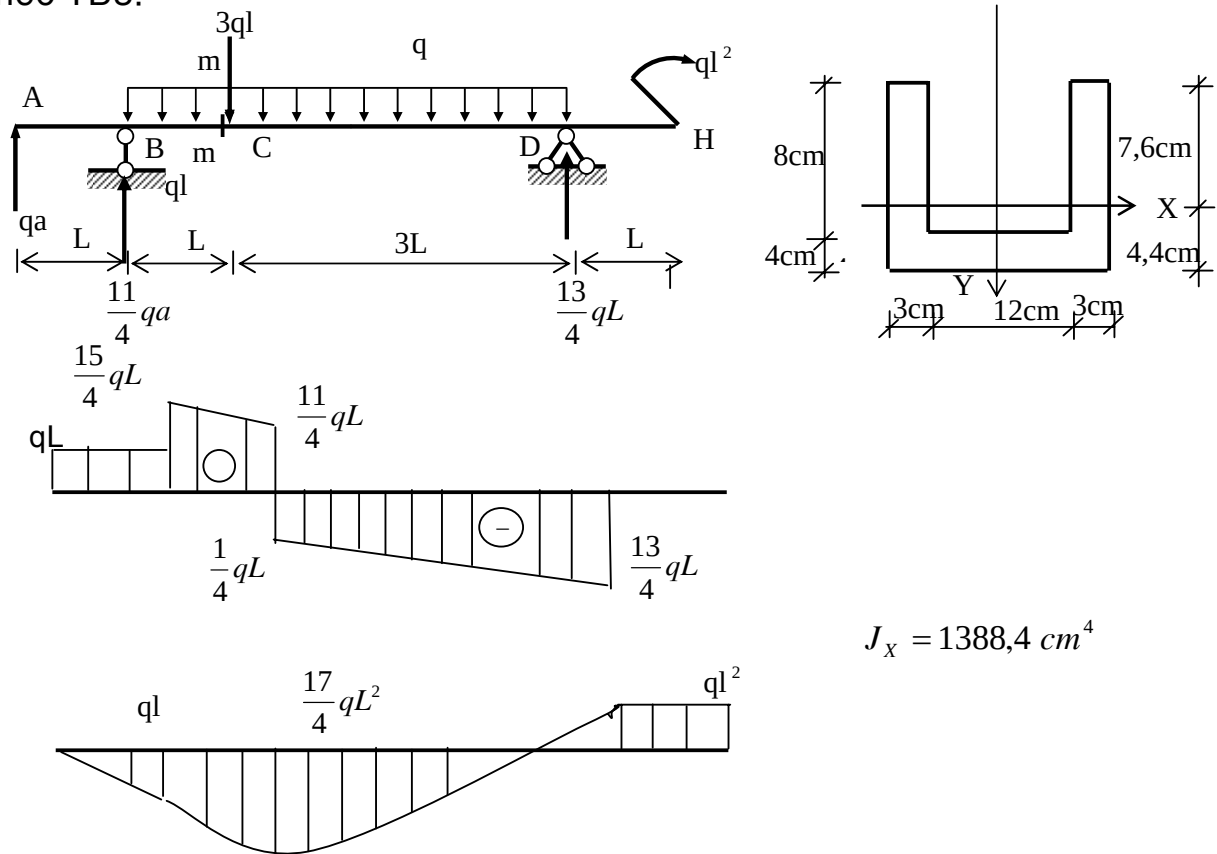
Từ điều kiện bền của phân tố ở **trạng thái ứng suất đơn**, xác định sơ bộ tải trọng cho phép sau đó tiến hành kiểm tra bền các phân tố còn lại

Thí dụ 7.9 Cho dầm có mặt cắt ngang và chịu lực như hình vẽ.

1/ Vẽ biểu đồ M_x và Q_y .

2/ Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp lớn nhất tại mặt cắt m-m (bên trái c).

3/ Tính ứng suất chính tại điểm K (mặt cắt tiếp giáp lòng và đế) mặt m-m, Theo TB3.



Tại mặt cắt m-m có nội lực : $M_x = \frac{17}{4} qa^2 = \frac{17}{4} \times 10 \times 1 \times 1 = 42,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$Q_y = \frac{11}{4} qL = \frac{11}{4} \times 10 \times 1 = 27,5 \text{ kN}$$

$$y_{\max}^k = 4,4 \text{ cm}, y_{\max}^n = 7,6 \text{ cm}$$

$$\sigma_{m-m}^{\max} = \left| \frac{M_x}{J_x} \right| y_{\max}^k = \frac{4250}{1388,4} \times 4,4 = 13,47 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{m-m}^{\min} = - \left| \frac{M_x}{J_x} \right| y_{\max}^n = - \frac{4250}{1388,4} \times 7,6 = -23,26 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{m-m}^{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} = 0,572 \text{ kN/cm}^2 \quad , \quad \text{với} \quad S_x^c = \left(2(3 \times 7,6 \times \frac{7,6}{2}) \right) = 173,28 \text{ cm}^3$$

Tính ứng suất chính tại K.

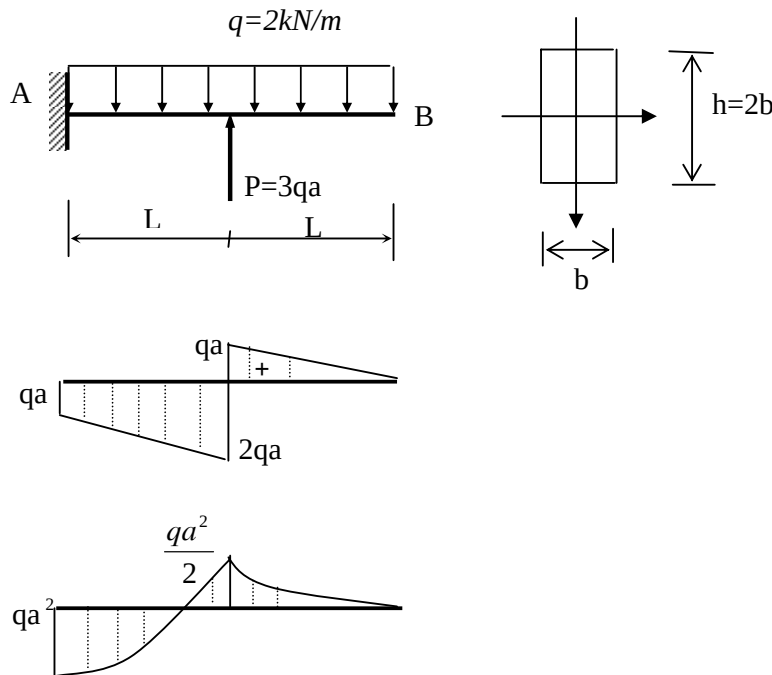
$$\tau_k = \frac{27,5 \times 158,4}{1388,4 \times 18} = 0,174 \text{ cm}^2, \quad S_x^c(18 \times 4 \times 2,2 \text{ cm}^3) = 158,4 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_z^k = \frac{4250}{1388,4} \times (4,4 - 4) = 1,22 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền 3:

$$\sigma_{i3} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{(1,22)^2 + 4(0,174)^2} = 2,22 \text{ kN/cm}^2$$

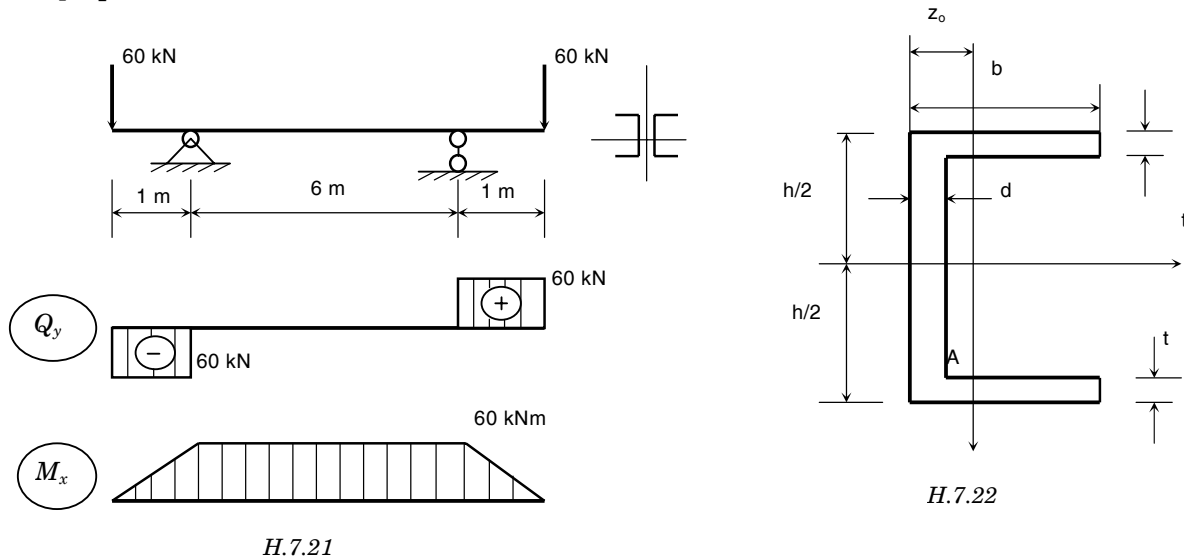
Thí dụ 7.6 Xác định kích thước mặt cắt ngang hình chữ nhật ,
cho $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$, $L=1\text{m}$, $h=2b$. Tính $\tau_{\max}$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W} = \frac{qa^2 \times 6}{b \times h^2} = \frac{2 \times 1 \times 100 \times 6}{b \times (2b)^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad b=7\text{cm}, h=14\text{cm}$$

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{F} = \frac{1,5 \times 2qa}{7 \times 14} = \frac{1,5 \times 2 \times 2 \times 1}{98} = 0,06 \text{ kN/cm}^2$$

Thí dụ 7.7 Xác định số hiệu mặt cắt ngang theo yêu cầu độ bền, nếu $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Giải.

Mô men uốn cực đại và lực cắt cực đại xảy ra tại cùng một mặt cắt dưới tác dụng của tải trọng:

$$M_{\max} = 60 \text{ kNm}; \quad Q_{\max} = 60 \text{ kN}$$

Mô men chống uốn cần thiết là:

$$W_x = \frac{M_{x,\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{16} = 375 \text{ cm}^3$$

Tra bảng thép hình mặt cắt [□OCT 8240-56 ta chọn 2[22 với:

một [22 có $d = 5,3 \text{ mm}$, $F = 26,7 \text{ cm}^2$; $W_x = 193 \text{ cm}^2$; $S_x = 111 \text{ cm}^3$;

$J_x = 2120 \text{ cm}^4$; $h = 22 \text{ cm}$; $t = 0,96 \text{ cm}$; $b = 8,2 \text{ cm}$.

Kiểm tra bền thép hình mới chọn:

* Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn: đương nhiên thỏa

* Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy: tại mặt cắt có:

$$Q_{y,\max} = 60 \text{ kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c} \quad \text{với} \quad \begin{cases} S_x^c = 2S_x = 2 \times 111 \text{ cm}^3 \\ J_x = 2 \times 2120 \text{ cm}^4 \\ b^c = 2d = 2 \times 0,53 \text{ cm} \\ Q_y = 60 \text{ kN} \end{cases}$$

Suy ra: $\tau_{\max} = \frac{60 \times 2 \times 111}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,96 \text{ kN/cm}^2$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2 > \tau_{\max}$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

* Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: đó là phân tố ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt này có:

$$|M_{x,\max}| = 60 \text{ kNm} \quad \text{và} \quad |Q_{y,\max}| = 60 \text{ kN}$$

$$|\sigma_x^A| = \frac{6000}{2 \times 2120} \times (11 - 0,96) = 14,21 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_x^c = 2 \times 8,2 \times 0,96 \times \left(11 - \frac{0,96}{2}\right) = 165,626 \text{ cm}^3$$

$$|\tau_A| = \frac{60 \times 165,626}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,21 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\sigma_{t3} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{(14,21)^2 + 4(2,21)^2} = 14,38 \text{ kN/cm}^2$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

Kết luận: Chọn 2 [22.

Thí dụ 7.8 Xác định tải trọng cho phép $[P]$ của dầm cho trên H.7.25.

Cho: $a = 80 \text{ cm}$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$

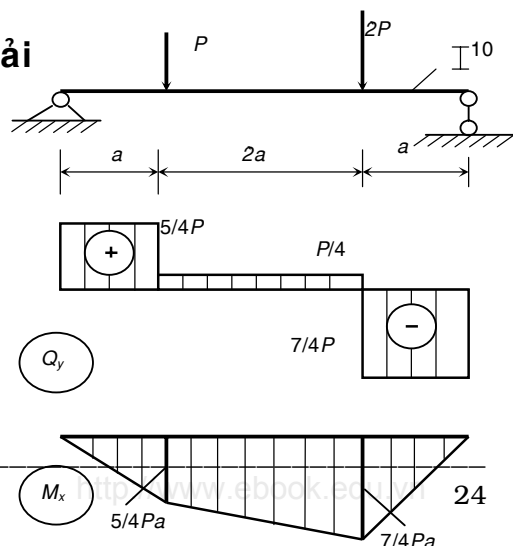
♦ Biểu đồ lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (H.7.25). Mặt cắt nguy hiểm có:

$$M_x = \frac{7}{4} Pa \quad \text{và} \quad Q_y = \frac{7}{4} P$$

Mặt cắt I 10 có: $h = 10 \text{ cm}$; $J_x = 198 \text{ cm}^4$

$$W_x = 39,7 \text{ cm}^3; S_x = 23 \text{ cm}^3,$$

Giải



$$d = 0,45 \text{ cm}; t = 0,72 \text{ cm}; b = 5,5 \text{ cm}$$

♦ Từ điều kiện bền của phân tố ở

TTÚS đơn nguy hiểm ta có:

$$\frac{7Pa}{4W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{4}{7} \frac{[\sigma]W_x}{a} = \frac{4}{7} \times \frac{16 \times 39,7}{80} = 4,537 \text{ kN}$$

Ta chọn $[P] = 4,53 \text{ kN}$.

♦ Với trị số của P đã chọn, ta kiểm tra bền các phân tố còn lại ở TTÚS trượt thuần túy và TTÚS phẳng đặc biệt.

++ Phân tố ở TTÚS trượt thuần túy ; ở trục trung hòa của mặt cắt có:

$$|Q_y| = \frac{7}{4} P = \frac{7}{4} \times 4,53 = 7,923 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{7}{4} \times \frac{4,53 \times 23}{198 \times 0,45} = 2,046 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

$\Rightarrow$ phân tố này thỏa điều kiện bền.

++ Phân tố ở TTÚS phẳng đặc biệt; ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt có:

$$M_x = \frac{7}{4} Pa = \frac{7}{4} \times 4,53 \times 0,8 = 6,342 \text{ kNm} \text{ và } Q_y = \frac{7}{4} P = 7,923 \text{ kN}$$

$$S_x^c = 5,5 \times 0,72 \times \frac{(10 - 0,72)}{2} = 18,37 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zy} = \frac{\frac{7}{4} \times 4,53 \times 18,37}{198 \times 0,45} = 1,634 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{634,2}{198} \times \left(\frac{10}{2} - 0,72 \right) = 13,71 \text{ kN/cm}^2$$

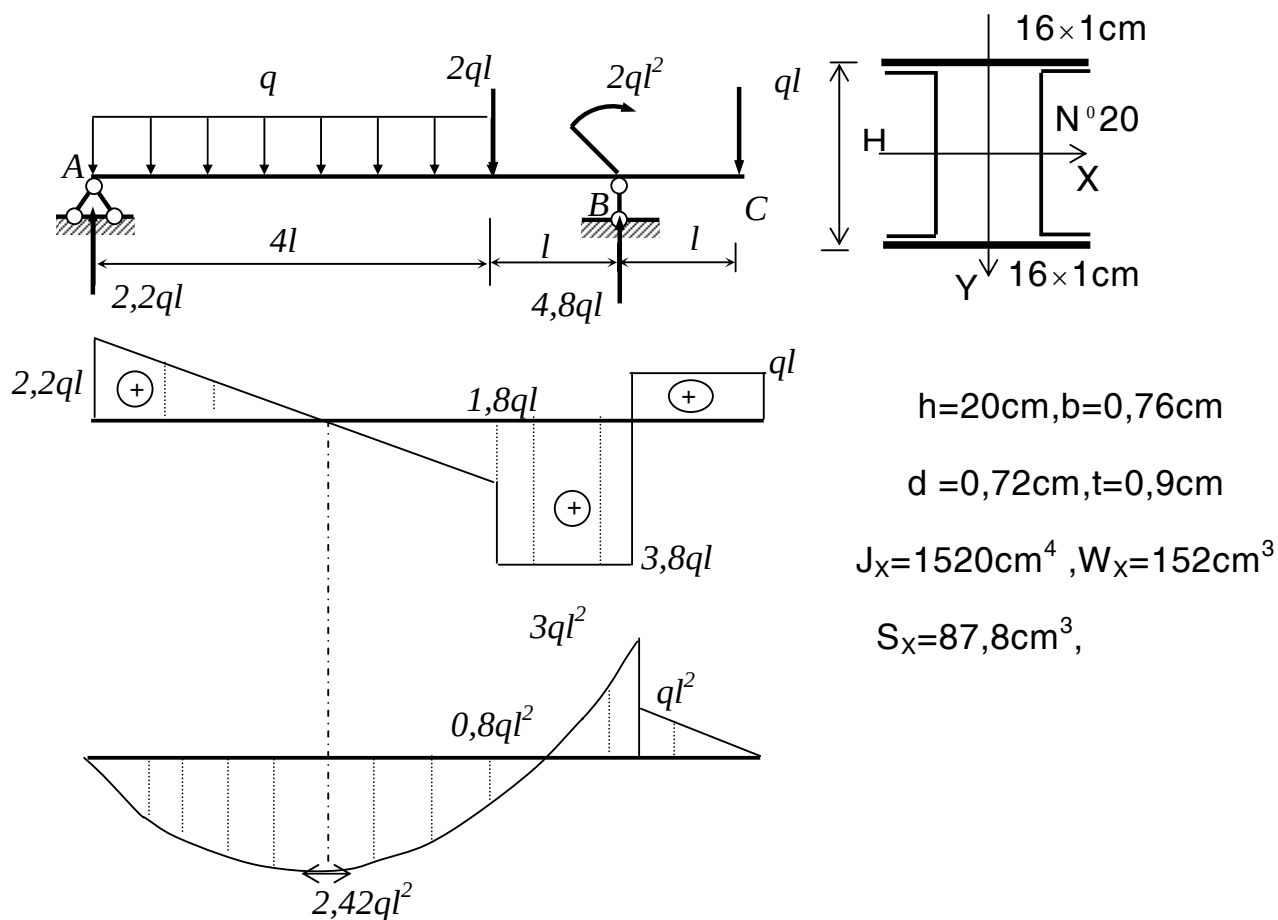
Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\begin{aligned} \sigma_{t3} &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} = \sqrt{(13,71)^2 + 4 \times (1,634)^2} \\ &= 14,09 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

♦ **Kết luận:** Tải trọng cho phép $[P] = 4,53 \text{ kN}$

Thí dụ 7.10: Cho dầm ABC chịu lực như hình vẽ .

Định $[q]$ cho $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 9 \text{ kN/cm}^2$



Tính: $J_x = 2 \left(\frac{16 \times 13^3}{12} + (10,5)^2 \times 16 \times 1 \right) + 2 J_x = 6570 \text{ cm}^4$

$$\max |\sigma_z| = \frac{|M_x^{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] \quad , \quad \text{với} \quad W_x = \frac{J_x}{\frac{H}{2}} = \frac{6570}{11} = 597,3 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow [q] \leq \frac{[\sigma] \times W_x}{3l^2} = \frac{16 \times 597,3}{3(1,5)^2} = 14,2 \text{ kN/m} , \text{ với } |M_x^{\max}| = 3ql^2$$

Kiểm tra lại ứng suất tiếp với q vừa tìm.

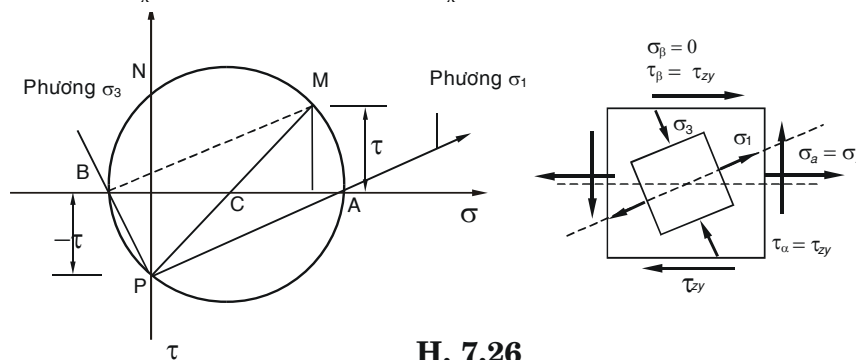
$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} = 4,07 \text{ kN/cm}^2 \leq [\tau], \text{ với } \begin{aligned} S_x^c &= 2S_x + (16 \times 1 \times 10,5) \text{ cm}^3 \\ J_x &= 6570 \text{ cm}^4, l = 1,5 \text{ m} \\ b^c &= 2d = 2 \times 0,52 \text{ cm} \\ Q_y &= 3,8ql = 3,8 \times 14,2 \times 1,5 = 80,94 \text{ kN} \end{aligned}$$

7.5 QUÃ ĐẠO ỨNG SUẤT CHÍNH

Trong phần bên trên chúng ta chỉ mới xác định trị số của ứng suất chính đối với một phân tố bất kỳ mà chưa đề cập đến phương của chúng. Những kết quả đạt được khá tốt đối với vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và khi nén là như nhau. Tuy nhiên, đối với các vật liệu như bê tông cốt thép, việc xác định phương của ứng suất chính tại mọi điểm rất cần thiết, để từ đó có thể đặt cốt thép gia cường theo các phương này.

Ta có thể xác định phương của ứng suất chính thông qua vòng tròn Mohr. Giả sử σ_α và τ_α là các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt phẳng vuông góc với trục dầm và có trị số dương:

$$\sigma_\alpha = +\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad \text{và} \quad \tau_\alpha = +\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c}$$



H. 7.26

Sau khi vẽ vòng tròn Mohr ứng suất chúng ta nhận thấy phương chính là phương nối từ điểm cực P(0, + τ_{zy}) với hai điểm A và B ở hai đầu đường kính của vòng tròn Mohr: PA chỉ phương ứng suất chính σ_1 , còn PB chỉ phương ứng suất chính σ_3 .

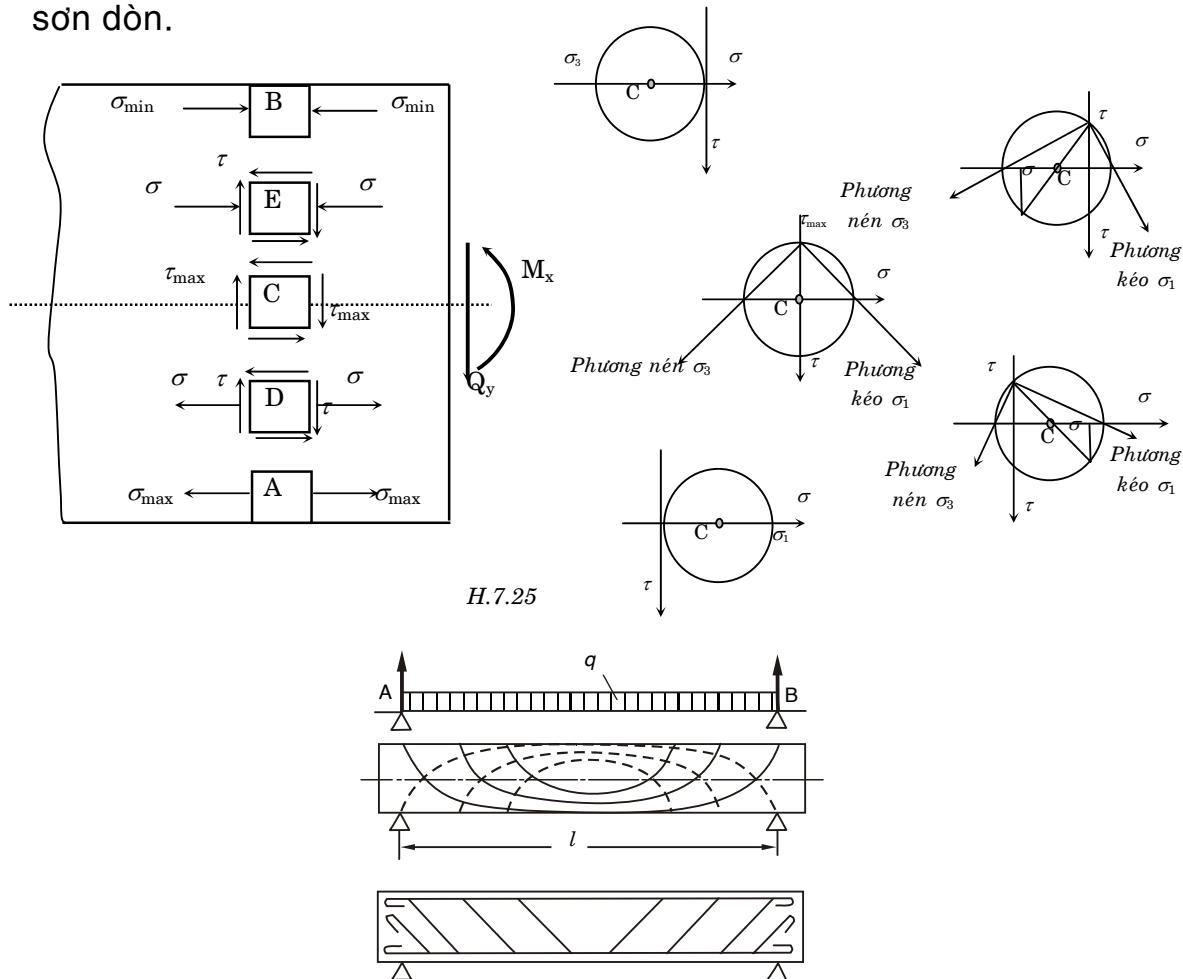
H.7.26 cho thấy, các vòng tròn Mohr ứng suất và các phương chính tại nhiều điểm khác nhau trên mặt cắt ngang. Ta giả sử rằng mômen uốn và lực cắt tại một mặt cắt mang dấu dương. Ứng suất chính thay đổi với biên mặt cắt ngang. Gần những biên, một trong các ứng suất chính bằng không, trong khi ứng suất chính kia có phương song song với trục dầm; còn ở trục trung hoà, các ứng suất chính có phương hợp với trục dầm một góc 45° .

Bằng phương pháp tương tự, ta có thể xác định được phương của ứng suất chính ở nhiều điểm trên dầm (H.7.27) Ta vẽ các đường cong có tiếp tuyến

là phương của ứng suất chính và gọi các đường đó là quỹ đạo ứng suất chính của dầm chịu uốn. Các quỹ đạo này hợp thành hai họ đường cong vuông góc nhau, một họ là quỹ đạo ứng suất kéo và một họ là quỹ đạo ứng suất nén. Các phương của ứng suất chính tùy thuộc vào loại tải trọng và điều kiện biên của dầm.

Trên H.7.28, quỹ đạo ứng suất kéo được biểu diễn bằng đường nét đậm còn quỹ đạo ứng suất nén biểu diễn bằng đường nét đứt.

Người ta thường dùng các phương pháp thực nghiệm để xác định quỹ đạo ứng suất chính như phương pháp quang đàn hồi, phương pháp dùng sơn dòn.



H. 7.28. Quỹ đạo ứng suất chính của dầm tựa đơn chịu tải phân bố đều

7.6 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI CỦA DẦM CHỊU UỐN PHẪNG

Trong chương TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT, ta đã có công thức tính thế năng riêng biến dạng đàn hồi của một phân tử là:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (7.29)$$

Trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, trạng thái ứng suất của phân tử là phẳng nên một thành phần ứng suất chính bằng không, σ_2 chẳng hạn, khi đó biểu thức của thế năng riêng biến dạng đàn hồi có dạng:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3] \quad (7.30)$$

trong đó: σ_1 và σ_3 là các ứng suất chính được suy từ σ_z và τ_{zy} theo công thức:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.31)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.32)$$

thay vào (7.30) $\Rightarrow$

$$u = \frac{1}{2E} \left\{ 2\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2\right] - 2\mu\left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2\right] \right\}$$

rút gọn ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2} \cdot \frac{2(1+\mu)}{E} \quad (7.33)$$

Ngoài ra, giữa các hằng số của vật liệu E , G , μ tồn tại hệ thức sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (7.34)$$

thay vào (7.33) và rút gọn, cuối cùng ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2G} \quad (7.35)$$

thay biểu thức của σ_z và τ_{zy} bằng (7.2) và (7.11) ta được:

$$u = \frac{M_x^2}{2EJ_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 (S_x^c)^2}{2GJ_x^2 (b^c)^2} \quad (7.36)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong một đoạn thanh dz là:

$$dU = \int u dz dF = dz \int_F u dF = dz \left[\int_F \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 \cdot (S_x^c)^2}{2GJ_x^2 (b^c)^2} \right) dF \right] \quad (a)$$

với: $\int_F y^2 dF = J_x$ và nếu ta ký hiệu:

$$\frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{(S_x^c)^2}{(b^c)^2} dF = \eta \quad (b)$$

ta được: $dU = \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz \quad (c)$

Do đó, thế năng biến dạng đàn hồi trong cả thanh với chiều dài L là:

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \int_0^L \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz \quad (7.37)$$

Với thanh có độ cứng thay đổi từng đoạn hay luật biến thiên của M_x và Q_y thay đổi từng đoạn thanh, công thức trên có thể rút gọn lại:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz \quad (7.38)$$

trong đó: L_i - chiều dài mỗi đoạn thanh, n - số đoạn thanh

η – hệ số điều chỉnh sự phân bố không đều của ứng suất tiếp.

Bằng cách áp dụng công thức tính η ta có thể tính được hệ số này đối với một số tiết diện thông thường

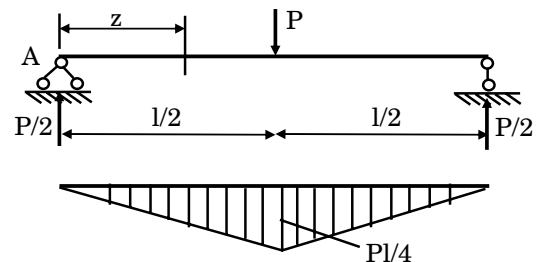
- Mặt cắt ngang hình chữ nhật: $\eta = 1,2$
- Mặt cắt ngang hình tròn: $\eta = 10/9$
- Mặt cắt ngang chữ I: $\eta = F / F_{lòng}$

trong đó: F - là diện tích toàn bộ mặt cắt.

$F_{lòng}$ là diện tích phần lòng (phần bản bụng) của chữ I.

7.7 DẦM CHỐNG UỐN ĐỀU

Trong trường hợp dầm có mặt cắt ngang không đổi, ta đã chọn kích thước của theo mặt cắt có mô men uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lý vì khi ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mặt cắt có mô men uốn



H. 7.29

lớn nhất đạt đến trị số ứng suất cho phép thì ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên các mặt cắt khác còn nhỏ hơn rất nhiều so với ứng suất cho phép. Như vậy ta chưa sử dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu ở các mặt cắt khác. Để tiết kiệm được vật liệu ta phải tìm hình dáng hợp lý của dầm sao cho ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị ứng suất cho phép. Dầm có hình dáng như vậy gọi là **dầm chống uốn đều**.

Ta xét vài thí dụ cụ thể sau đây.

Giả sử, ta có dầm chịu lực như trên hình vẽ (H.7.29), mô men uốn M_x và lực cắt Q_y trên mặt cắt 1-1 nào đó cách gối tựa A bên trái một khoảng cách có trị số là:

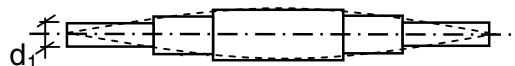
$$\begin{cases} M_x = \frac{P}{2} z \\ Q_y = \frac{P}{2} \end{cases}$$

Giả thiết mặt cắt ngang có hình dáng là một hình tròn. Như vậy trị số ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt được tính với công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P.z}{0,1d^3}$$

Với điều kiện ứng suất cực đại trên mọi mặt cắt cùng đạt tới trị số ứng suất cho phép $[\sigma]$, ta tìm được luật biến thiên của đường kính d theo biến số z như sau:

$$d = \sqrt[3]{\frac{P.z}{0,1[\sigma]}}$$



H. 7.30

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như trên hình vẽ (H. 7.30).

Ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mô men uốn, vì tại đó mô men uốn bằng không. Song, như vậy không thỏa mãn điều kiện bền của lực cắt Q_y . Quả vậy, trên mọi mặt cắt của dầm ta đều có một trị số lực cắt $Q_y = \frac{P}{2}$ và

lực cắt đó sinh ra ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max} = \frac{4 Q_y}{3 F}$. Vì thế diện tích của mặt cắt cần phải đủ để chịu cắt. Do đó phải chọn đường kính với điều kiện:

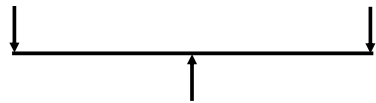
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \leq [\tau]$$

⇔ đường kính có trị số bé nhất cũng phải là:

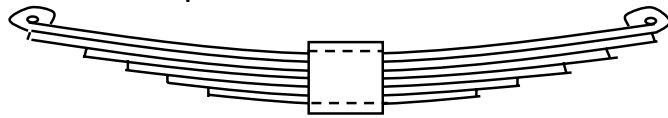
$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \frac{Q_y}{[\tau] \cdot \pi}} \quad (b)$$

Vì điều kiện chế tạo, rất khó gia công để thanh có thể có hình dáng đường cong được biểu diễn theo biểu thức (a), nên trong thực tế người ta thường làm các trục hình bậc, nghĩa là đường kính của các mặt cắt thay đổi từng đoạn một, gần sát với đường chống uốn đều (H. 7.31).

Các lò xo có sơ đồ chịu lực như (H.7.31), thường được ghép bởi các lá thép như (H.7.32). Các lá thép được ghép theo hình dáng của dầm chống uốn đều, hình dáng đó làm lò xo có trọng lượng nhỏ và chuyển vị lớn. Loại lò xo này thường dùng làm díp của các trục bánh xe.

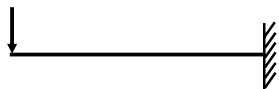


H. 7.31

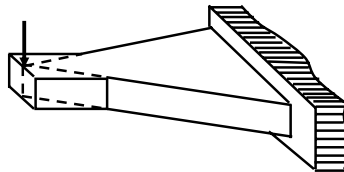


H. 7.32

Đối với dầm có sơ đồ chịu lực như (H.7.33), nếu chiều cao của dầm không đổi thì dầm chống uốn đều có hình dáng như trên (H. 7.34). Mặt cắt ở đầu tự do có diện tích khác không vì dầm còn chịu lực cắt. Diện tích đó được xác định tùy theo trị số của lực cắt.



H. 7.33



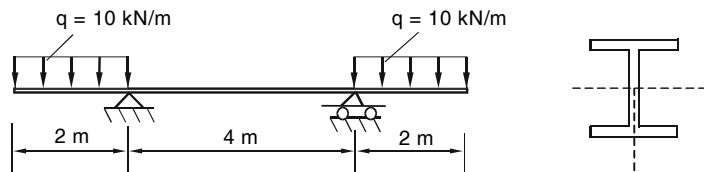
H. 7.34

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1 Xác định chiều dài nhịp lớn nhất cho dầm tựa đơn có mặt cắt ngang hình chữ nhật ($140 \text{ mm} \times 240 \text{ mm}$) chịu tác dụng của tải phân bố đều cường độ $q = 6,5 \text{ kN/m}$ nếu ứng suất cho phép là $8,2 \text{ MPa}$ (trọng lượng của dầm đã kể trong q).

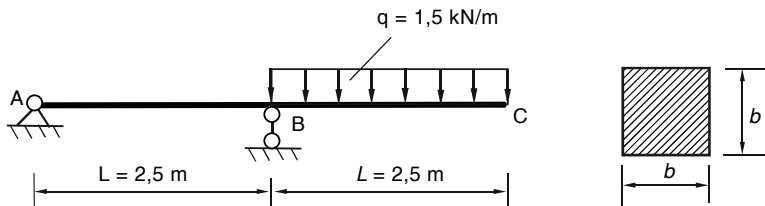
Trả lời: $3,68 \text{ m}$

7.2 Một dầm thép mặt cắt ngang hình chữ I tựa đơn và có hai đầu mút thừa như trên H.7.2. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều cường độ $q = 10 \text{ kN/m}$ ở mỗi đầu mút thừa. Giả sử mặt cắt ngang chữ I có số hiệu 16 có mômen chống uốn (hay suất tiết diện) là 109 cm^3 . Xác định ứng suất pháp cực đại trong dầm do uốn, $\sigma_{\max}$ do q .



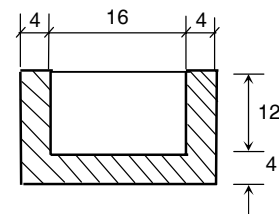
H.7.2

7.3 Một dầm bằng gỗ ABC có mặt cắt ngang hình vuông cạnh b , tựa đơn tại A và B chịu tải trọng phân bố đều $q = 1,5 \text{ kN/m}$ trên phần mút thừa BC (H.7.3). Tính cạnh của hình vuông b , giả sử chiều dài nhịp $L = 2,5 \text{ m}$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 12 \text{ MPa}$. Hãy kể đến trọng lượng riêng của dầm biết rằng trọng lượng riêng của gỗ là $\gamma = 5,5 \text{ kN/m}^3$.



H.7.3

7.4 Một máng nước có mặt cắt ngang như H.7.4. Máng đặt lên hai cột cách nhau 6 m . Vật liệu làm máng có trọng lượng riêng $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$. Hỏi khi chứa đầy nước thì ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại là bao nhiêu?



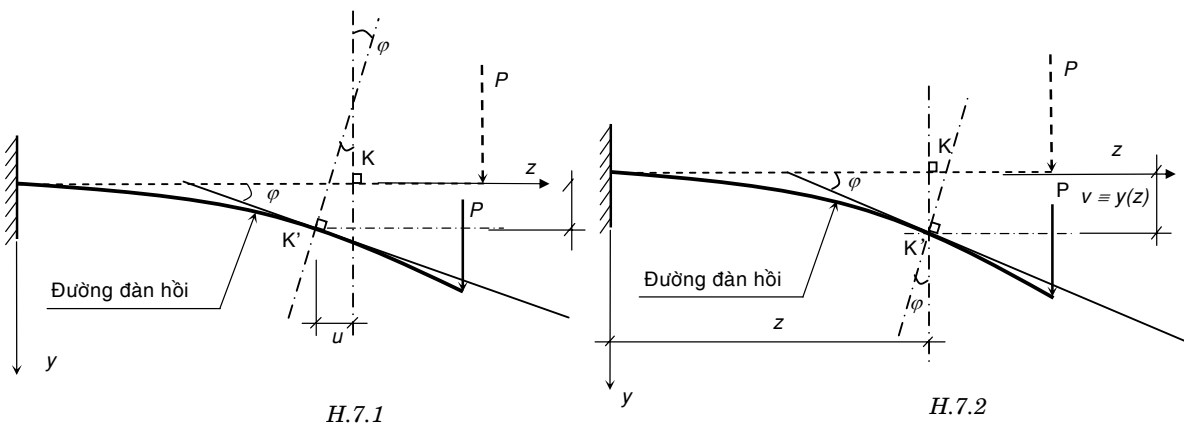
H.7.4

Chương 8

CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

8.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Khi tính một dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài điều kiện bền còn phải chú ý đến điều kiện cứng. Vì vậy, cần phải xét đến biến dạng của dầm. Dưới tác dụng của các ngoại lực, trục dầm bị uốn cong, trục cong này được gọi là **đường đàn hồi** của dầm (H.8.1).



Xét một điểm K nào đó trên trục dầm trước khi biến dạng. Sau khi biến dạng, điểm K sẽ di chuyển đến vị trí mới K'. Khoảng cách KK' được gọi là **chuyển vị thẳng** của điểm K. Chuyển vị này có thể phân làm hai thành phần:

Thành phần v vuông góc với trục dầm (song song với trục y) gọi là **chuyển vị đứng** hay **độ võng** của điểm K.

Thành phần u song song với trục dầm (song song với trục z) gọi là **chuyển vị ngang** của điểm K.

Ngoài ra, sau khi trục dầm biến dạng, mặt cắt ngang ở K bị xoay đi một góc φ , ta gọi góc xoay này là **chuyển vị góc** (hay là **góc xoay**) của mặt cắt ngang ở điểm K. Có thể thấy rằng, góc xoay φ chính bằng góc giữa trục chưa biến dạng của dầm và tiếp tuyến ở điểm K của đường đàn hồi (H.8.1).

Ba đại lượng u , v , φ là ba thành phần chuyển vị của mặt cắt ngang ở điểm K.

Trong điều kiện biến dạng của dầm là bé thì thành phần chuyển vị ngang u là một đại lượng vô cùng bé bậc hai so với v , do đó có thể bỏ qua chuyển vị u và xem KK' là bằng v , nghĩa là vị trí K' sau khi biến dạng nằm trên đường vuông góc với trục dầm trước biến dạng (H.8.2).

Góc xoay φ có thể lấy gần đúng: $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dz}$.

Nếu chọn trục dầm là z , trục y vuông góc với trục dầm, thì chuyển vị v chính là tung độ y của điểm K'. Tung độ y cũng chính là độ võng của điểm K. Ta thấy rõ nếu K có hoành độ z so với gốc nào đó thì các chuyển vị y , φ cũng là những hàm số của z và phương trình đàn hồi là:

$$y(z) = v(z)$$

Phương trình của góc xoay sẽ là:

$$\varphi(z) = \frac{dv}{dz} = \frac{dy}{dz} = y'(z)$$

hay, **phương trình của góc xoay là đạo hàm của phương trình đường đàn hồi.**

Quy ước dương của chuyển vị:

- Độ võng y dương nếu hướng xuống.
- Góc xoay φ dương nếu mặt cắt quay thuận chiều kim đồng hồ.

Điều kiện cứng: Trong kỹ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường khống chế độ võng lớn nhất của dầm không được vượt qua một giới hạn nhất định để đảm bảo yêu cầu về sự làm việc, mỹ quan của công trình..., điều kiện này được gọi là **điều kiện cứng**. Nếu gọi f là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là:

$$\left[\frac{f}{L} \right] = \frac{1}{300} \div \frac{1}{1000}$$

trong đó: L - là chiều dài nhịp dầm.

Tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của $[f/L]$.

8.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Xét 1 điểm bất kỳ K trên trục dầm.

Trong chương 7 (công thức 7.1) ta đã lập được mối liên hệ giữa độ cong của trục dầm tại K sau biến dạng với mômen uốn nội lực M_x tại K là:

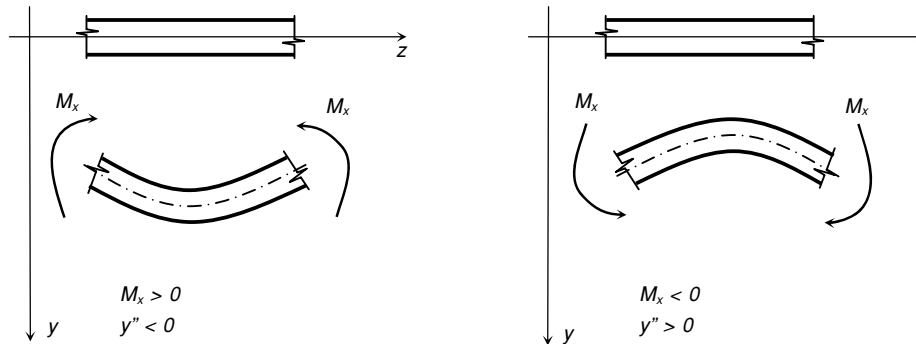
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (a)$$

Mặt khác, vì đường đàn hồi được biểu diễn bởi phương trình hàm số $y(z)$ trong hệ trục (yz) nên độ cong của đồ thị biểu diễn của hàm số ở 1 điểm K có hoành độ z được tính theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (b)$$

$$(a) \text{ và } (b) \Rightarrow \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (c)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi, tuy nhiên phải chọn sao cho hai vế của phương trình trên đều thỏa mãn.



H.8. 3

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như H.8.3. Trong cả 2 trường hợp mômen uốn M_x và đạo hàm bậc hai y'' luôn luôn trái dấu, cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{M_x}{EI_x}$$

Với giả thiết chuyển vị là bé (độ võng và góc xoay bé), có thể bỏ qua $(y')^2$ so với 1 và khi đó **phương trình vi phân của đường đàn hồi** có dạng gần đúng như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (8.1)$$

trong đó: Tích số EJ_x là **độ cứng khi uốn** của dầm .

8.3 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Vế phải của phương trình vi phân (8.1) chỉ là một hàm số của z nên (8.1) là phương trình vi phân thường.

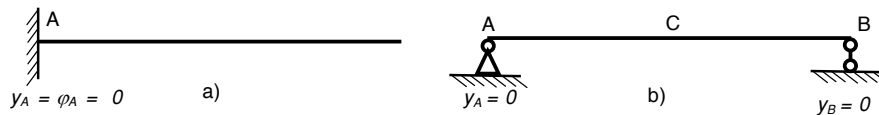
Tích phân lần thứ nhất (8.1) $\Rightarrow$ phương trình góc xoay:

$$\varphi = y' = \int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (8.2)$$

Tích phân lần thứ hai $\Rightarrow$ phương trình đường đàn hồi:

$$y = \int \left(\int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D \quad (8.3)$$

Trong (8.2) và (8.3), C và D là hai hằng số tích phân sẽ được xác định các điều kiện biên. Các điều kiện này phụ thuộc vào liên kết của dầm và phụ thuộc vào sự thay đổi tải trọng trên dầm.



H. 8.4

Đối với dầm đơn giản, có thể có các điều kiện như sau:

+ Đầu ngàm của dầm console có góc xoay và độ võng bằng không

(H.8.4a): $y_A = \varphi_A = 0$

+ Các đầu liên kết khớp độ võng bằng không (H.8.4b):

$$y_A = y_B = 0$$

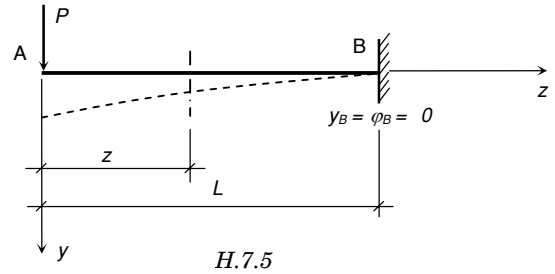
+ Tại nơi tiếp giáp giữa hai đoạn dầm có phương trình đường đàn hồi khác nhau, độ võng và góc xoay bên trái bằng với độ võng và góc xoay bên phải (điểm C trên H.8.4b): $y_C^{tr} = y_C^{ph}$; $\varphi_C^{tr} = \varphi_C^{ph}$

Thí dụ 8.1 Viết phương trình đường đàn hồi và góc xoay cho dầm công son (console) như H.8.5. Từ đó suy ra độ võng và góc xoay lớn nhất. Cho $EJ_x =$ hằng số.

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -Pz \quad (a)$$



thế vào (8.1) $\Rightarrow$ phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = \frac{Pz}{EJ_x} \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C \quad (c)$

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D \quad (d)$$

C và D được xác định từ các điều kiện biên về độ võng và góc xoay tại ngàm:

$$z = L; \varphi = 0 \text{ và } y = 0$$

thay các điều kiện này vào (c) và (d) $\Rightarrow$

$$C = -\frac{PL^2}{2EJ_x}; D = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}z + \frac{PL^3}{3EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EJ_x}; \varphi = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$

$y_{\max} > 0$ chỉ rằng độ võng của điểm A hướng xuống

$\varphi < 0$ chỉ rằng góc xoay của điểm A ngược kim đồng hồ.

Thí dụ 8.2 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm (H.8.6).Cho $EJ_x = \text{hằng}$ **Giải.**

Phương trình mômen uốn tại
mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -\frac{qz^2}{2}$$

thế vào (8.1), $\Rightarrow y'' = -\frac{qz^2}{2EJ_x}$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{qz^3}{6EJ_x} + C$ (c)

$$y = \frac{qz^4}{24EJ_x} + C z + D \quad (d)$$

hai điều kiện biên ở đầu ngàm $z = L$; $\varphi = 0$ và $y = 0$ cho :

$$C = -\frac{qL^3}{6EJ_x}; \quad D = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Vậy phương trình đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^4}{24EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x} z + \frac{qL^4}{8EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{qL^3}{6EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x} z$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EJ_x} \quad \text{và} \quad \varphi_A = -\frac{qL^3}{6EJ_x}$$

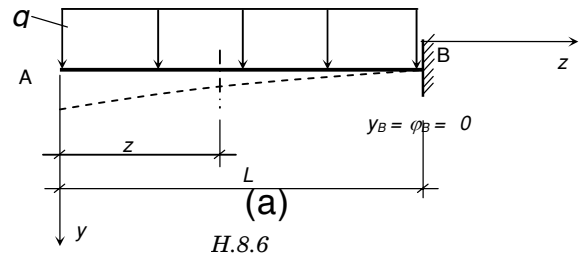
Thí dụ 8.3 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều (H.8.7). Độ cứng EJ_x của dầm không đổi.

Giải.

Phương trình mômen uốn tại
mặt cắt ngang có hoành độ z là:

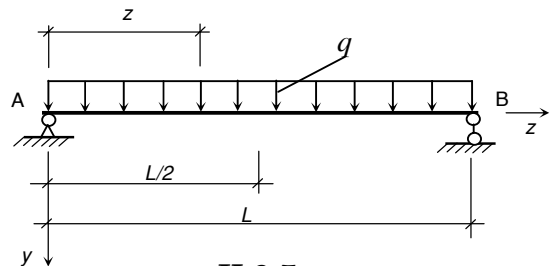
$$M_x = \frac{qL}{2} z - \frac{qz^2}{2} = \frac{q}{2} (Lz - z^2) \quad (a)$$

thay vào (8.1), $\Rightarrow$ phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:



H.8.6

(b)



H.8.7

$$y'' = -\frac{q}{2EJ_x}(Lz - z^2) \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) + C \quad (c)$

$$y = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right) + C z + D \quad (d)$$

điều kiện biên ở các gối tựa trái và phải của dầm: $\begin{cases} \text{khi : } z = 0; & y = 0 \\ \text{khi : } z = L; & y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D = 0; C = \frac{qL^3}{24EJ_x}$$

Như vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^3}{24EJ_x} z \left(1 - 2\frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3}\right) \quad (e)$$

$$\varphi = y' = \frac{qL^3}{24EJ_x} \left(1 - 6\frac{z^2}{L^2} + 4\frac{z^3}{L^3}\right) \quad (g)$$

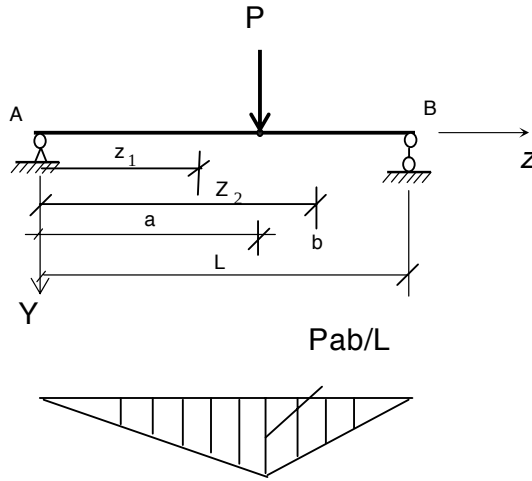
Độ võng lớn nhất của dầm ở tại mặt cắt ngang giữa nhịp ứng với:
 $z = \frac{L}{2}$ (tại đây $y' = 0$)

thay $z = \frac{L}{2}$ vào (e), $y_{\max} = y\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EJ_x}$

Góc xoay lớn nhất, nhỏ nhất ($y'_{\max}$, $y'_{\min}$) tại mặt cắt ngang có $y'' = 0$ (hay $M_x = 0$), tức ở các gối tựa trái và phải của dầm. Thay $z = 0$ và $z = L$ lần lượt vào (g) $\Rightarrow \varphi_{\max} = y'_{\max} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \varphi_{\min} = y'_{\min} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$

Góc xoay của mặt cắt ở gối tựa trái thuận chiều kim đồng hồ, góc xoay của mặt cắt ở gối tựa phải ngược chiều kim đồng hồ.

Thí dụ 8.4 Lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm trên hai gối tựa chịu lực tập trung P như H.8.8 cho biết $EJ_x = \text{hằng số}$.



H.8.8

Giải.

Dầm có hai đoạn, biểu thức mômen uốn trong hai đoạn AC và CB khác nhau nên biểu thức góc xoay và độ võng trong hai đoạn cũng khác nhau. Viết cho từng đoạn các biểu thức M_x , y'' , y' , y như sau:

Mômen uốn M_x trong các đoạn sau:

$$\text{Đoạn AC } (0 \leq z_1 \leq a): M_{x(1)} = \frac{Pb}{L} z_1 \quad (a)$$

$$\text{Đoạn CB } (a \leq z_2 \leq L): M_{x(2)} = \frac{Pb}{L} z_2 - P(z_2 - a) \quad (b)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong mỗi đoạn:

$$\text{Đoạn AC: } y_1'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_1 \quad (c)$$

$$\text{Đoạn CB: } y_2'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_2 + \frac{P}{EJ_x} (z_2 - a) \quad (d)$$

Tích phân liên tiếp các phương trình trên, ta được:

Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$y_1' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_1^2 + C_1 \quad (e)$$

$$y_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_1^3 + C_1 z_1 + D_1 \quad (g)$$

Đoạn CB ($a \leq z_2 \leq L$):

$$y_2' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_2^2 + \frac{P}{2EJ_x} (z_2 - a)^2 + C_2 \quad (h)$$

$$y_2 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_2^3 + \frac{P}{6EJ_x} (z_2 - a)^3 + C_2 z_2 + D_2 \quad (i)$$

Xác định các hằng số tích phân C_1, D_1, C_2, D_2 từ các điều kiện biên

- Ở gối tựa A, B độ võng bằng không
- Ở mặt cắt ngang C nối tiếp hai đoạn, độ võng và góc xoay của hai đoạn phải bằng nhau.

$$\Leftrightarrow \text{ khi: } \begin{aligned} z_1 &= 0; \quad y_1 = 0 \\ z_2 &= 0; \quad y_2 = 0 \\ z_1 &= z_2 = a; \quad y_1 = y_2; \quad y_1' = y_2' \end{aligned}$$

Từ bốn điều kiện này $\Rightarrow$:

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} L^3 + \frac{P}{6EJ_x} (L - a)^3 + C_2 L + D_2 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + C_1 a + D_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + C_2 a + D_2 \\ -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + C_1 = -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + C_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, $\Rightarrow$

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6LEJ_x} (L^2 - b^2)$$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng trong từng đoạn là:

Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$\begin{cases} \varphi_1 = y_1' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} - \frac{z_1^2}{2} \right) \\ y_1 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} z_1 - \frac{z_1^3}{6} \right) \end{cases}$$

Đoạn BC ($a \leq z_2 \leq L$):

$$\begin{cases} \varphi_2 = y_2' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{z_2^2}{2} - \frac{L(z_2 - a)^2}{2b} - \frac{L^2 - b^2}{6} \right) \\ y_2 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{(z_2 - a)^3}{6b} L + \frac{L^2 - b^2}{6} z_2 - \frac{z_2^3}{6} \right) \end{cases}$$

Tính độ võng lớn nhất trong dầm bằng cách dựa vào điều kiện $y' = 0$,

Giả sử $a > b$. Trước hết ta sẽ xét độ võng lớn nhất trong đoạn nào ở gối tựa A ($z_1 = 0$) góc xoay bằng:

$$\varphi_{1A} = \frac{PbL}{6EJ_x} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right) > 0$$

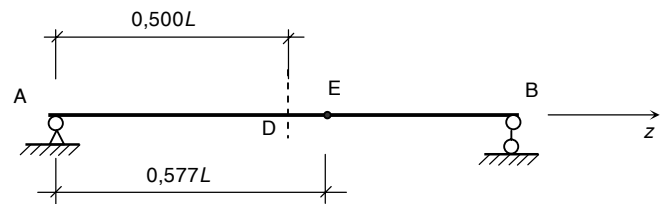
và ở C ($z_1 = a$): $\varphi_{1C} = -\frac{PbL}{3EJ_x} (a - b) < 0$

Như vậy, giữa hai điểm A và C góc xoay φ_1 đổi dấu, nghĩa là sẽ bị triệt tiêu một lần. Điều đó cho thấy độ võng có giá trị lớn nhất trong đoạn AC.

Để tìm hoành độ $z_1(0)$ của mặt cắt ngang có độ võng lớn nhất, ta cho phương trình $\varphi_1 = 0$:

$$\varphi_1[z_1(0)] = \frac{Pb}{LEJ_x} \left[\frac{L - b^2}{6} - \frac{(z_1(0))^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow z_1(0) = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (o)$$



H.8.9

Sau đó đưa vào biểu thức (I) của độ võng, $\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của độ võng

$$y_{\max} = y_{1(z_1(0))} = \frac{\sqrt{3}Pb(L^2 - b^2)}{27EJ_x} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right)} \quad (p)$$

Các hệ quả:

- Nếu P đặt ở giữa nhịp dầm ($b = L/2$), thì từ (o) và (p), ta được:

$$z_1(0) = \frac{L}{2} = 0,500L; \quad y_{\max} = \frac{PL^3}{48EJ_x}$$

- Khi P ở gần gối B, tức $b \rightarrow 0$ ta có: $z_1(0) = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$

Như vậy, nếu tải trọng di chuyển từ trung điểm D giữa nhịp dầm đến gối tựa B (H.8.9) thì hoành độ $z_1(0)$ sẽ biến thiên từ $0,5L$ đến $0,577L$, tức là từ điểm D đến điểm E. Trong thực tế người ta thường quy ước là khi tải trọng P tác dụng ở một vị trí nào đó thì vẫn có thể coi độ võng lớn nhất ở giữa nhịp dầm.

Thí dụ, nếu tải trọng P tác dụng ở vị trí như H.8.8 thì độ võng ở giữa nhịp dầm sẽ bằng:

$$y_{(l/2)} = \frac{Pb}{48EJ_x} (3L^2 - 4b^2)$$

So sánh hai giá trị $y_{\max}$ và $y_{(l/2)}$ thấy hai giá trị này khác nhau và rất ít

Nhận xét: Nếu dầm có nhiều đoạn, cần phải lập phương trình vi phân đường đàn hồi cho nhiều đoạn tương ứng. Ở mỗi đoạn, phải xác định hai hằng số tích phân, nếu dầm có n đoạn thì phải xác định $2n$ hằng số, bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn n càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp hay độ cứng dầm thay đổi.

8.4 XÁC ĐỊNH ĐỘ VỒNG VÀ GÓC XOAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO (PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN)

♦ Phần trước, đã có liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực (CH. 2):

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = q \\ \frac{dM_x}{dz} = Q \\ \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q \end{cases} \quad (a)$$

♦ Đối với việc khảo sát đường đàn hồi của dầm, cũng có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (b)$$

Đối chiếu các phương trình (a) và (b), ta thấy có sự tương tự sau:

y	M_x
$\frac{dy}{dz} = y'$	$\frac{dM_x}{dz} = Q$
$\frac{d^2 y}{dz^2} = y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$	$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q$

Ta nhận thấy muốn tính góc xoay y' và độ võng y thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số $\frac{M_x}{EJ_x}$

Tương tự muốn có lực cắt Q_y và mômen uốn M_x thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số tải trọng q .

Tuy nhiên ở phần trước (CH.2), ta đã tính lực cắt Q_y và mômen uốn M_x theo tải trọng q từ việc khảo sát các phương trình cân bằng.

Như vậy, cũng có thể tính góc xoay y' và độ võng y theo hàm $y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$ mà không cần tích phân. Đó cũng chính là **phương pháp tải trọng giả tạo**.

♦ Phương pháp tải trọng giả tạo:

Tưởng tượng một **dầm giả tạo (DGT)** có chiều dài giống **dầm thực (DT)**, trên DGT có **tải trọng giả tạo** q_{gt} giống như biểu đồ $-\frac{M_x}{EJ_x}$ trên dầm thật, thì sẽ có sự tương đương:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = q_{gt} \quad ; \quad y' = Q_{gt} \quad ; \quad y = M_{gt}$$

trong đó: q_{gt} - Tải trọng giả tạo

Q_{gt} - Lực cắt giả tạo- Lực cắt trong DGT

M_{gt} - Mômen giả tạo- Mômen uốn trong DGT

⇒ Muốn tính góc xoay y' và độ võng y của một **dầm thực (DT)** (dầm đang khảo sát) thì chỉ cần tính lực cắt Q_{gt} và mômen uốn M_{gt} do tải trọng giả tạo tác dụng trên DGT gây ra.

Tuy nhiên, để có được sự đồng nhất đường đàn hồi y và Momen uốn M_{gt} thì điều kiện biên của chúng phải giống nhau: $y' = Q_{gt}$; $y = M_{gt}$ tại bất kỳ điểm trên hai DT và DGT; Ngoài ra nếu xét tại điểm bất kỳ trên dầm phải khảo sát đến sự giống nhau của bước nhảy góc xoay $\Delta y'$ và bước nhảy lực cắt ΔQ_{gt} .

♦ Cách chọn dầm giả tạo (DGT)

DGT được suy từ DT với điều kiện là nơi nào trên DT không có độ võng và góc xoay thì điều kiện liên kết của DGT ở những nơi đó phải tương ứng sao cho q_{gt} không gây ra M_{gt} và Q_{gt} .

Chiều dài của DT và DGT là như nhau.

Bảng 8.1 cho một số DGT tương ứng với một số DT thường gặp.

♦ Cách tìm tải trọng giả tạo q_{gt}

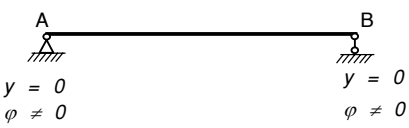
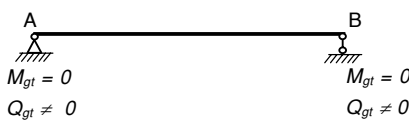
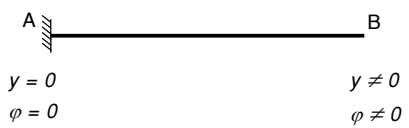
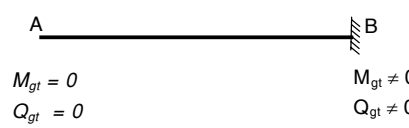
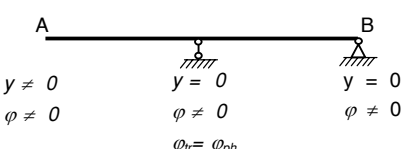
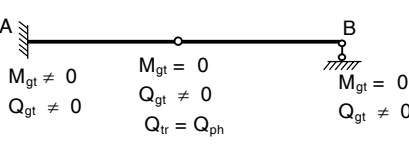
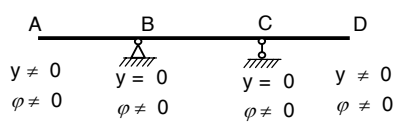
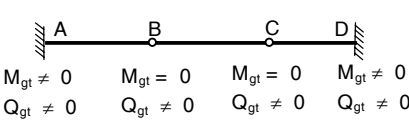
Vì $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$, nên q_{gt} bao giờ cũng ngược dấu với mômen uốn M_x . Do đó:

- Nếu: $M_x > 0$ thì $q_{gt} < 0$, nghĩa là nếu biểu đồ M_x nằm phía dưới trục hoành (theo qui ước $M_x > 0$ vẽ phía dưới trục thanh) thì q_{gt} hướng xuống

- Nếu: $M_x < 0$ thì q_{gt} hướng lên.

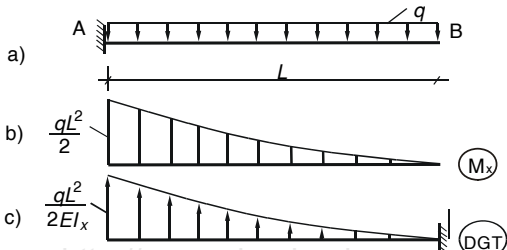
⇔ q_{gt} luôn có chiều hướng theo thớ căng của biểu đồ mô men M_x

Bảng 8.1

Dầm thực	Dầm giả tạo
 $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi_{tr} = \varphi_{ph}$	 $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{tr} = Q_{ph}$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$

Bảng 8.2

Hình vẽ	Diện tích (Ω)	Vị trí trọng tâm		
		x_1	x_2	
	$\frac{Lh}{2}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{2L}{3}$	
	$\frac{Lh}{3}$	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$	
	$\frac{Lh}{n+1}$	$\frac{L}{n+2}$	$\frac{L(n+1)}{n+2}$	
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{5L}{8}$	
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$	



Chương 8: Chuyển vị của dầm chịu uốn

đầu tự do B của dầm công xon chịu tải trọng phân bố đều q (H.8.10a). Độ cứng của dầm $EJ_x = \text{const}$

Giải.

+ Biểu đồ mômen uốn M_x của DT có dạng đường bậc 2 được vẽ trên H.810b.

+ DGT tương ứng với lực phân bố q_{gt} như H.8.10c.

+ Độ võng và góc xoay tại B của DT chính bằng mômen uốn M_{gt} và lực cắt Q_{gt} tại B của DGT. Dùng mặt cắt ở sát B của dầm giả tạo, tính nội lực ở mặt cắt ngang này và được:

$$\varphi_B = Q_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L = \frac{qL^3}{6EJ_x};$$

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L \times \frac{3}{4}L = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Thí dụ 8.6 Tính độ võng và

góc xoay tại C của dầm cho

trên H.8.11a. Đoạn dầm AB

có độ cứng $2EJ$, đoạn

dầm BC có độ cứng EJ .

Giải.

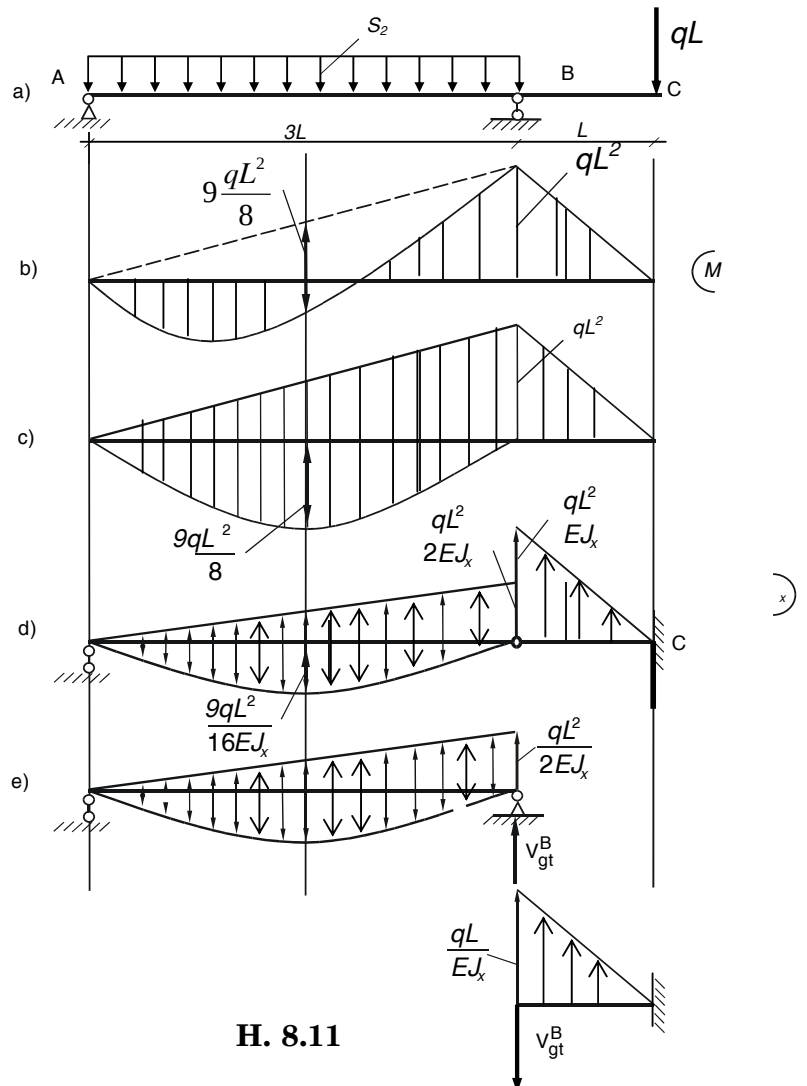
+ Biểu đồ mômen uốn được vẽ trên H.8.11b.

Để dễ dàng trong việc tính toán ta phân tích M_x thành tổng của các biểu đồ mômen uốn có dạng đơn giản như H.8.11c.

+ DGT với lực q_{gt} như H.8.11d.

(chú ý là độ cứng trong AB và BC khác nhau).

+ Tính nội lực ở C của DGT.



H. 8.11

Chia DGT thành hai DGT như H.8.11e, phản lực ở B của DGT AB là:

$$V_{gt}^B = \frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Phản lực này tác dụng lên DGT BC và dễ dàng tính được:

$$Q_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} = +\frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$M_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} L + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} \frac{2}{3} L = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}$$

$\Rightarrow$ độ võng và góc xoay tại C của DT

$$y_C = M_{gt}^C = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}; \quad \varphi_C = Q_{gt}^C = \frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TÍNH (BTST)

Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

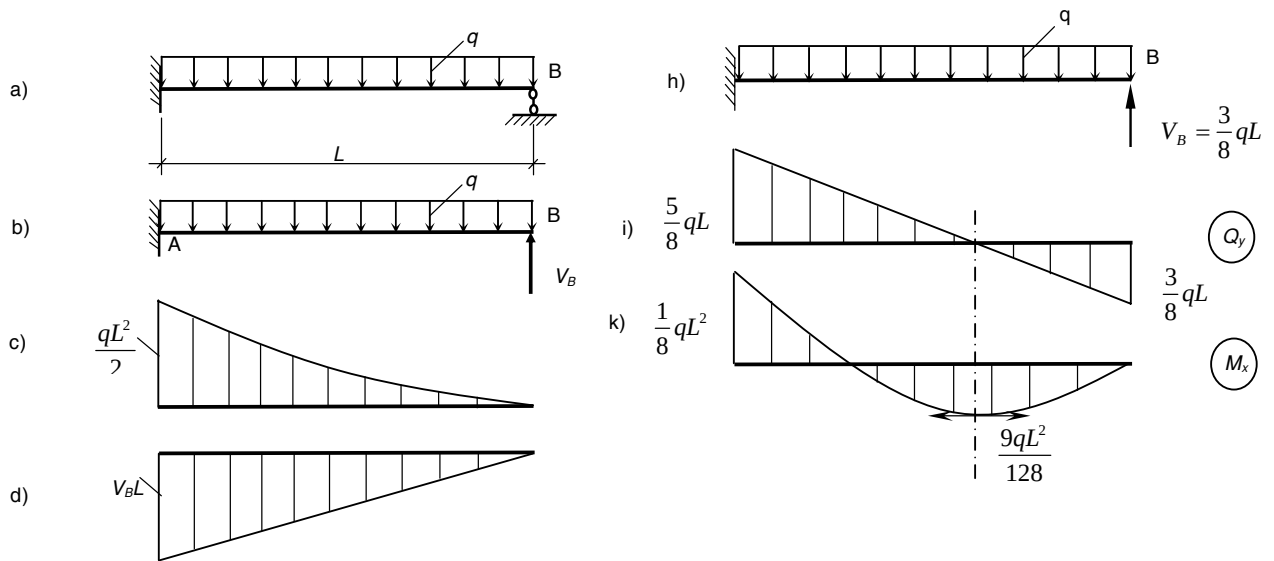
Thí dụ 8.6 Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.12a. Biết EJ = hằng số.

Giải.

+ Dầm đã cho có bốn phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm một phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

$\Leftrightarrow$ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$



+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.12b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.12c,d, DGT và q_{gt} như H.8.12 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.12b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4} L - \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3} L$$

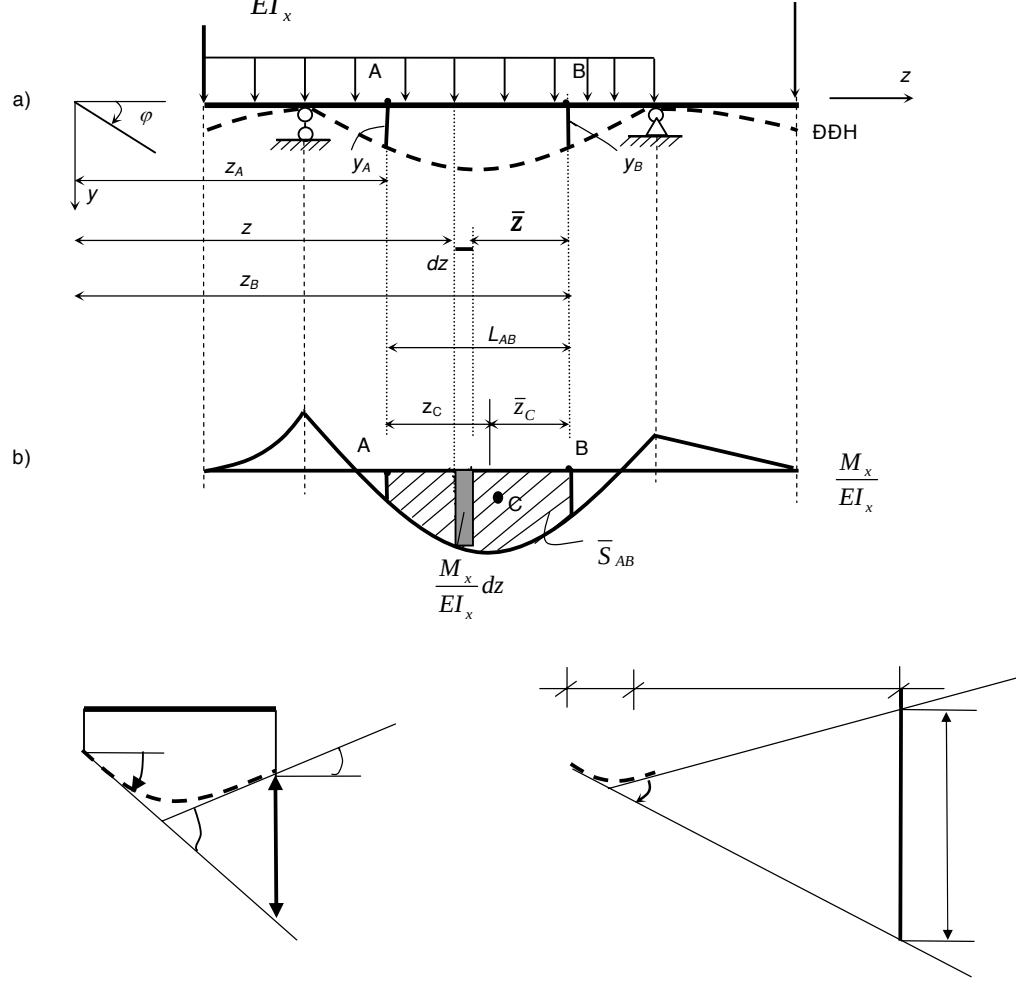
$$\text{Điều kiện độ võng } y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8} qL$$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.12 i, k.

7.4. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm có biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ như H.8.10b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.10a.



H.8.10 Phương pháp diện tích mô men

Xét đoạn dầm AB: $d\varphi = -\frac{M_x}{EI_x} dz$, suy ra: $\int_{z_A}^{z_B} d\varphi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EI_x} dz$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.18)$$

với $\bar{S}_{AB}$ là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

Từ hình 8.10d: $dt = \bar{z} d\varphi = -\bar{z} \frac{M_x}{EI_x} dz$ suy ra: $t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z} \frac{M_x}{EI_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB} \quad (8.20)$

$\bar{z}_C$ là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích $\bar{S}_{AB}$ đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mô men

tính của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.10d ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) + t_{BA}$$

$$y_B = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \quad (8.21)$$

(7.21) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai điểm này.

Từ (8.21) có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$).

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB} \quad \text{và} \quad y_A = y_B - \varphi_A (z_B - z_A) + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với: $\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$

ta viết: $y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$

Khai triển và rút gọn, ta được: $y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.22)$

z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của $\bar{S}_{AB}$ kể từ A.

Thí dụ 8.5. Dùng phương pháp diện tích mô men xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.11). EI_x = hằng số.

Giải. Theo định lý 1, công thức (7.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$)

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và $\bar{S}_{AD}$ có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$.

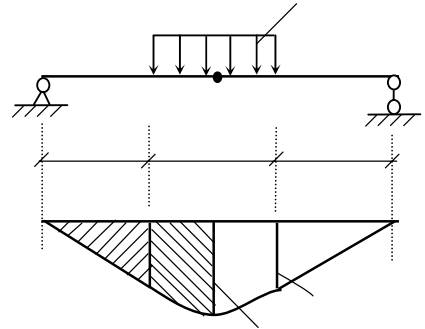
ta suy ra: $\varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x}$$

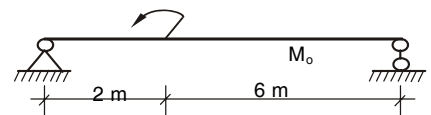
Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

Áp dụng công thức (8.21), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} = 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \left(\bar{z}_C^{(1)} \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \bar{S}_2 + \bar{z}_C^{(3)} \bar{S}_3 \right) = \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EI_x}$$



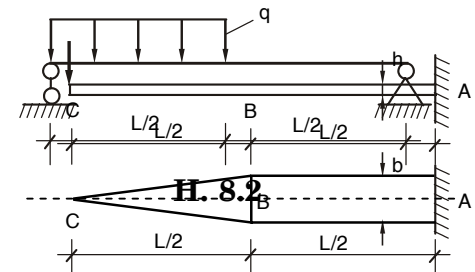
BÀI TẬP CHƯƠNG 8



8.1 Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, biết $M_0 = 20 \text{ kNm}$, EJ không đổi. H.8.1.

8.2 Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, EJ không đổi. H.8.2.

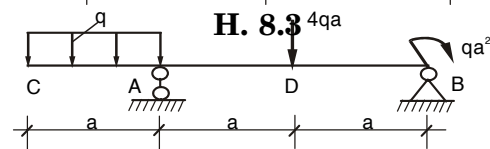
8.3 Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.3. Tính độ võng tại dầm tự do và góc xoay tại mặt cắt ngang giữa dầm.



8.4 Dầm có độ cứng không đổi như H.8.4.

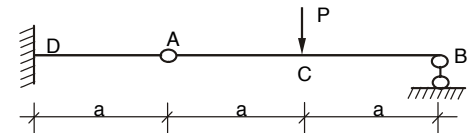
Xác định:

- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



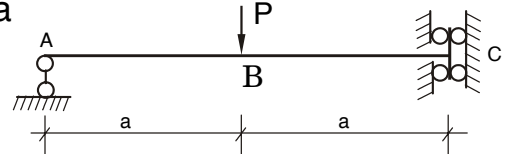
H.8.4

8.5 Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm như H.8.5, biết độ cứng $EJ = \text{hằng}$.



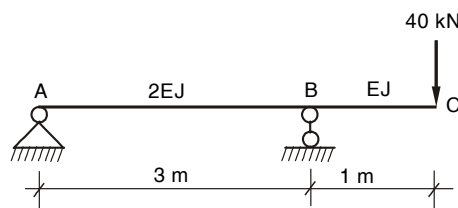
H. 8.5

8.6 Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.6, biết $EJ = \text{hằng}$.



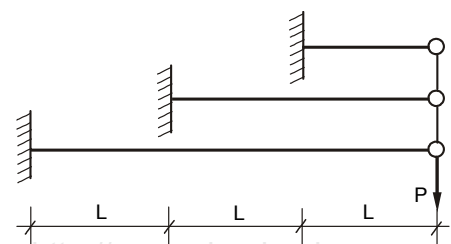
H. 8.6

8.7 Xác định độ võng và góc xoay tại C. H.8.7



H. 8.7

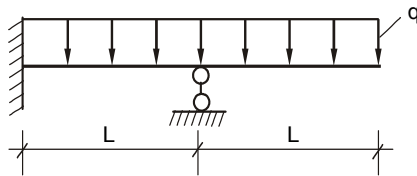
8.8 Một hệ thống gồm ba công xon, đầu tự do được liên kết với nhau bằng những giằng cứng như H.8.8. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực treo ở



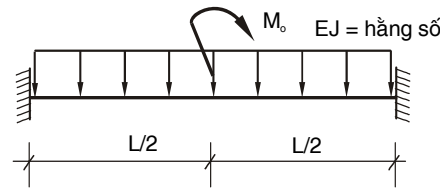
H. 8.8

dầm, biết độ cứng EJ là hằng số.

8.9 Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.9. Viết phương trình đường đàn hồi, biết độ cứng EJ là hằng số.



H. 8.9



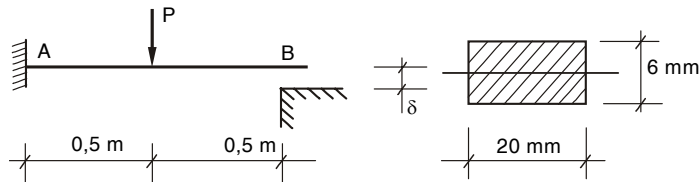
H. 8.10

8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.10.

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở đầu A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Ở đầu B có khe hở $\delta = 20 \text{ mm}$.

Cho $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

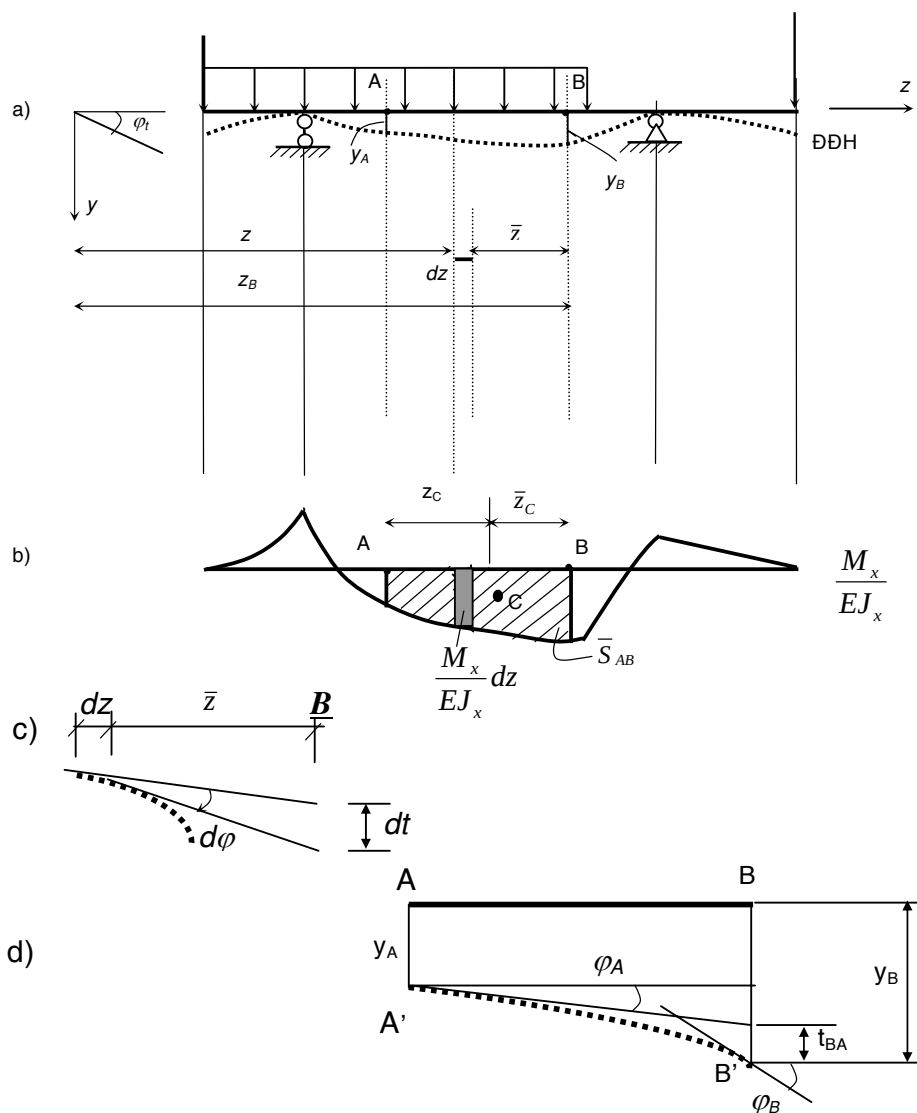


H. 8.11

8.5. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN (DTMM)

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm chịu uốn có biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ như H.8.13b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.13a.



H.8.13

♦ Xét đoạn dầm AB, ta đã có:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \Leftrightarrow \frac{dy'}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow d\phi = -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\Rightarrow \int_{z_A}^{z_B} d\phi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.4)$$

với $\bar{S}_{AB}$ là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

♦ Từ H.8.13c ta có thể viết:

$$dt = \bar{z} d\varphi = -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz$$

suy ra:
$$t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

$\bar{z}_C$ là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích $\bar{S}_{AB}$ đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mômen tĩnh của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.13d ta có:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} \\ &= y_A + \varphi_A L_{AB} - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \end{aligned} \quad (8.5)$$

(8.5) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai điểm này.

♦ Từ (8.5) ta cũng có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$). Thật vậy theo phần trên ta có:

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB}$$

và:
$$y_A = y_B - \varphi_A L_{AB} + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với:
$$\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$$

ta viết:
$$y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$$y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.5)'$$

trong đó: z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của $\bar{S}_{AB}$ kể từ A.

- ♦ Dùng phương pháp DTMM cần biết diện tích và trọng tâm của một số hình (bảng 8.2).

Thí dụ 8.7. Dùng phương pháp DTMM xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.14). $EJ_x = \text{hằng số}$.

Giải.

+ Theo định lý 1, công thức (8.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$) :

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và $\bar{S}_{AD}$ có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$ (H.8.14).

$$\Rightarrow \varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

$$= \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{L}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

+ Áp dụng công thức (8-5), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD}$$

$$= 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left(\bar{z}_C^{(1)} \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \bar{S}_2 + \bar{z}_C^{(3)} \bar{S}_3 \right)$$

$$= \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left[\left(\frac{L}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{3} + \right.$$

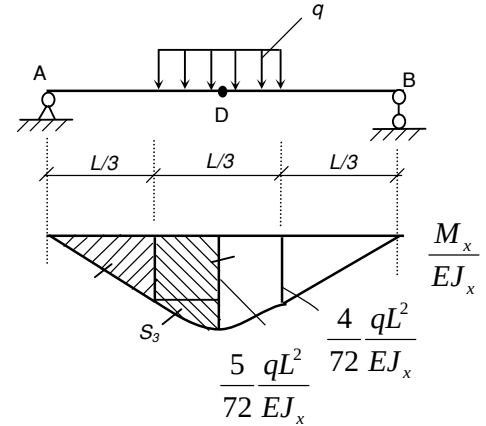
$$\left. + \frac{1}{2} \times \frac{L}{6} \times \frac{L}{6} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} + \frac{3}{8} \times \frac{L}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} \right]$$

$$= \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EJ_x}$$

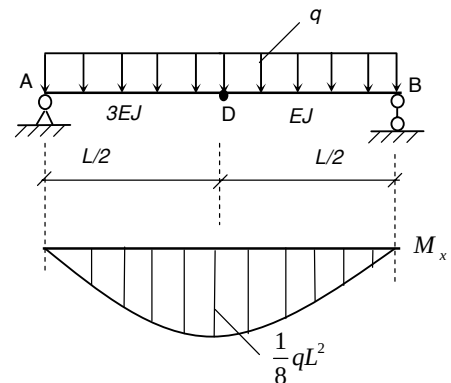
Độ võng mặt cắt D hướng xuống dưới.

Thí dụ 8.8

Xác định góc xoay ở A,B và độ võng ở D của dầm cho như H.8.15



H.8.14



$$\bar{S}_1 = \frac{1}{72} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$\frac{1}{24} \frac{qL^2}{EJ_x} \quad \frac{1}{8} \frac{qL^2}{EJ_x}$$

H.8.15

Giải

+ Biểu đồ mô men uốn M_x và $\frac{M_x}{EJ}$

vẽ như H.8.15

+ Theo công thức 8.5, ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L - \bar{z}_C \times \bar{S}_{AB}$$

$$0 = 0 + \varphi_A L - \bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 - \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \frac{1}{L} (\bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2)$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{L} \left[\left(\frac{3L}{8} + \frac{L}{2} \right) \times \frac{qL^3}{72EJ_x} + \frac{5L}{8} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} \right] = \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

+ Bây giờ áp dụng định lý 1, công thức (8.4)

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A - \bar{S}_{AB} = \varphi_A - \bar{S}_1 - \bar{S}_2 \\ &= \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} - \frac{qL^3}{72EJ_x} - \frac{qL^3}{24EJ_x} = -\frac{19}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} \end{aligned}$$

Góc xoay mặt cắt B ngược chiều kim đồng hồ.

+ Cuối cùng xác định độ võng ở D bằng công thức 8.5 áp dụng cho hai điểm A và D

$$\begin{aligned} y_D &= y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} \\ &= 0 + \frac{13}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{72EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

+ Ta có thể kiểm tra lại kết quả của y_D bằng cách khảo sát đoạn DB, áp dụng (8.5)'

$$\begin{aligned} y_D &= y_B - \varphi_B \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{BD} \\ &= 0 - \left(-\frac{19}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \right) \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TĨNH (BTST)

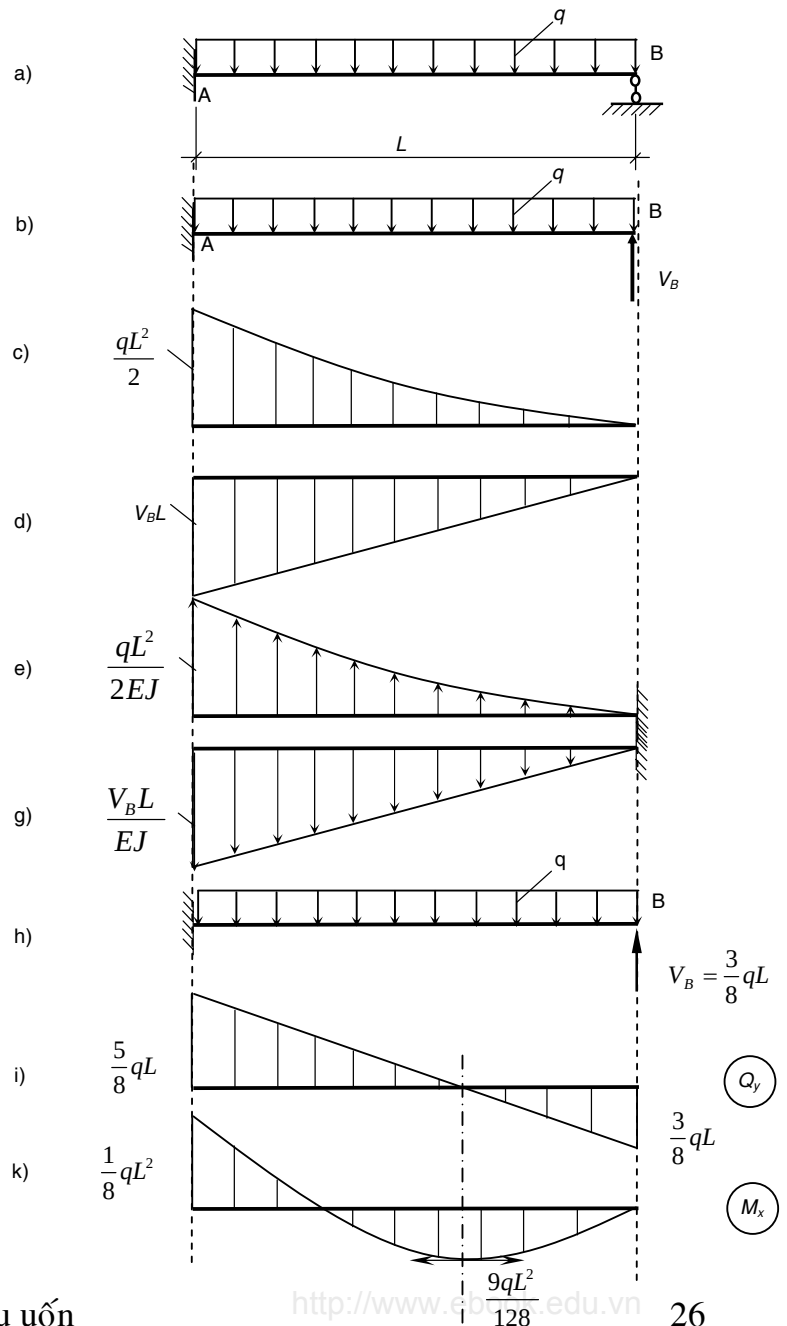
Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

Thí dụ 8.10. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.16a.



Biết $EJ = \text{const.}$

Giải

Giải.

+ Dầm đã cho có 4 phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm 1 phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

$\Leftrightarrow$ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$

+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.16b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.16c,d, DGT và q_{gt} như H.8.16 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.16b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3}L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4}L - \frac{1}{2}L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3}L$$

$$\text{Điều kiện độ võng } y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8}qL$$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.16 i, k.

Thí dụ 8.11. Tính phản lực V_B của dầm siêu tĩnh như H.8.17a.

Cho biết : $EJ_x = \text{hằng}$

Giải.

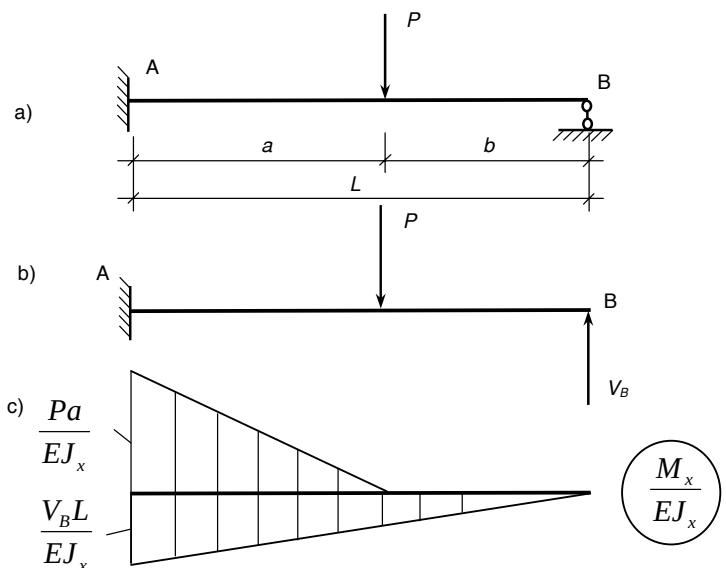
Tương tự thí dụ trên, cũng có điều kiện $y_B = 0$

Tính y_B bằng phương pháp diện tích mô men

Biểu đồ M_x/EJ_x do tải trọng P và phản lực V_B được vẽ H.8.17c

Áp dụng công thức (8.5), ta

Chương 8: Chuyển vị của dầm chịu uốn



H.8.17

có:

$$y_A = y_B - \varphi_A L + \bar{z} \bar{s}_{AB}$$

$$0 = y_B - 0 \times L + \left[- \left(L - \frac{a}{3} \right) \frac{1}{2} a \frac{Pa}{EJ} + \frac{2}{3} L \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \right]$$

$$y_A = - \frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

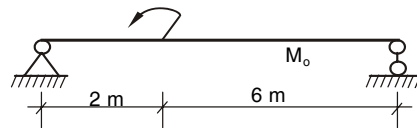
Điều kiện $y_B = 0$ cho ta

$$0 = - \frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

suy ra $V_B = \frac{Pa^2}{2L^3}(3L-a)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1. Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định

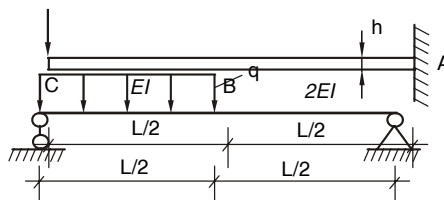


H.8.19

hạn, biết $M_0 = 20 \text{ kNm}$

8.2. Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn

8.3. Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.21. Tính độ võng tại dầm tự do và góc tại mặt cắt ngang giữa dầm.

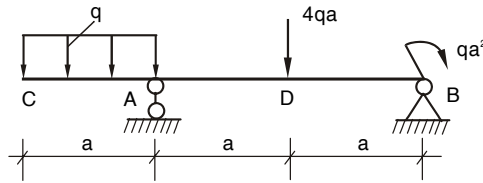


H.8.20

H.8.21

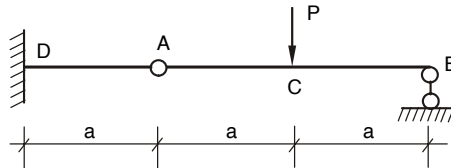
8.4. Dầm có độ cứng không đổi. Xác định:

- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



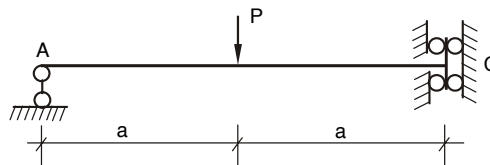
H.8.22

8.5. Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm



như H.8.23.

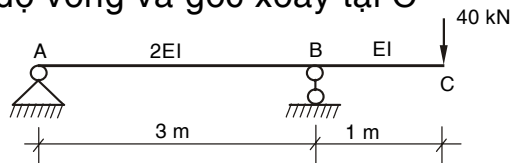
H.8.23



8.6. Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.24.

H.8.24

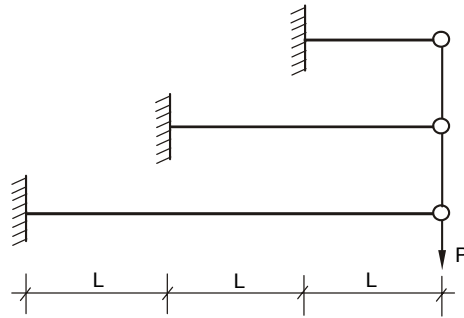
8.7. Xác định độ võng và góc xoay tại C



H.8.25

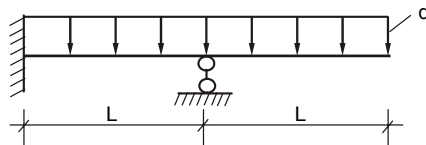
8.8. Một hệ thống gồm ba công xon, Dầm tự do được liên kết với nhau

bằng những găng cứng. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực P treo ở dầm



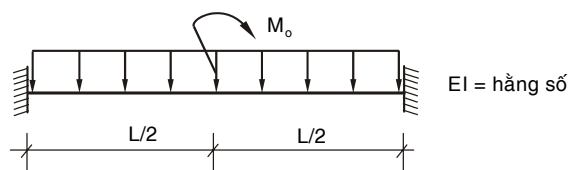
H.8.26

8.9. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.27. Viết phương trình đường đàn hồi.



H.8.27

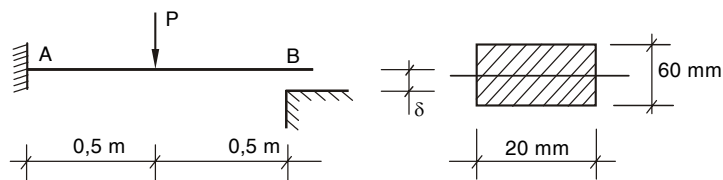
8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.28.



H.8.28

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở dầm A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Ở dầm B có khe hở $\delta = 20 \text{ mm}$, cho $E = 2 \cdot 10^5$



MN/m^2

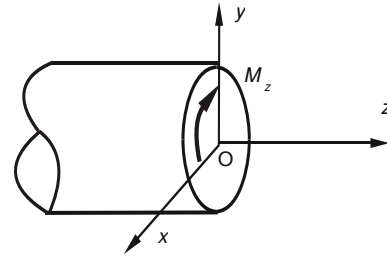
H.8.29

Chương 9

XOẮN THUẦN TÚY

I. KHÁI NIỆM

1- Định nghĩa: Thanh chịu xoắn thuần túy khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một thành phần **nội lực là mômen xoắn M_z** (H.9.1).



H. 9.1

Dấu của M_z : $M_z > 0$ khi từ ngoài mặt cắt nhìn vào thấy M_z quay thuận kim đồng hồ

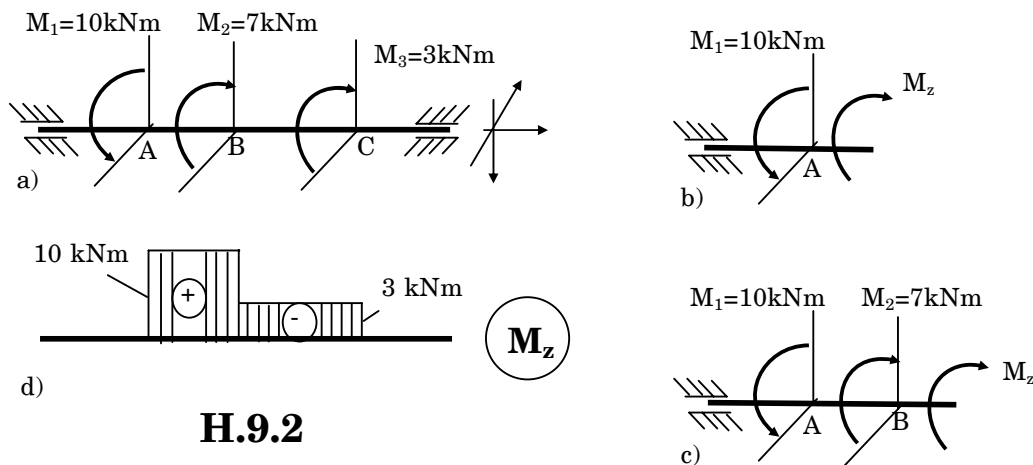
Ngoại lực: Gồm các ngẫu lực, mômen xoắn M_z , nằm trong mặt phẳng vuông góc trục thanh.

Thực tế: trục truyền động, thanh chịu lực không gian, dầm đỡ ô văng...

2- Biểu đồ nội lực mômen xoắn M_z

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ bằng cách xác định nội lực theo phương pháp mặt cắt và điều kiện cân bằng tĩnh học: $\sum M/OZ = 0$.

Thí dụ 1: Vẽ biểu đồ M_z cho trục truyền động chịu tác dụng của ba ngẫu lực xoắn (mômen xoắn) (H.9.2.a).



H.9.2

Giải: Thực hiện một mặt cắt ngang trong đoạn AB, xét cân bằng phần trái (H.9.2.b), dễ thấy rằng để cân bằng ngoại lực là ngẫu lực xoắn M_1 , trên tiết diện đang xét phải có nội lực là mômen xoắn M_z :

$$\sum M / z = 0 \Rightarrow M_z - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 10 \text{ kNm}$$

Tương tự, cắt qua đoạn BC, xét phần trái (H.9.2.c):

$$\sum M / z = 0 \Rightarrow M_z + 7 - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 3$$

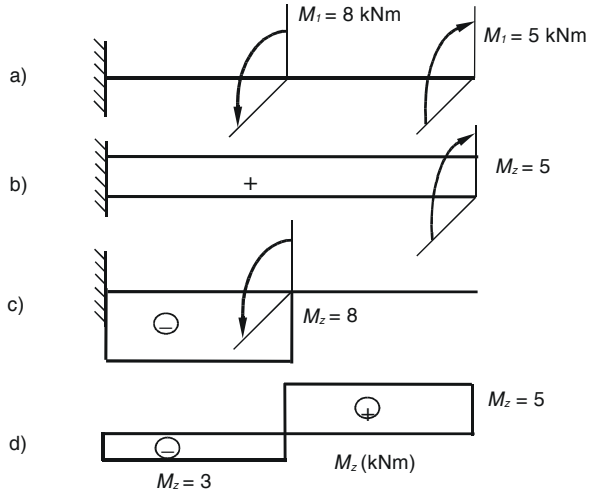
Mômen tại các tiết diện của hai đoạn đầu thanh bằng không, biểu đồ nội lực vẽ ở H.9.2.d.

Thí dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z (H.9.3.a)

Giải: Phân tích thành tổng của hai trường hợp tác dụng riêng lẻ (H.9.3b và H.9.3c).

Trong mỗi trường hợp, ngoại lực là một ngẫu lực gây xoắn, do đó nội lực trong thanh cũng là mômen xoắn. Biểu đồ nội lực của từng thanh vẽ ngay trên H.9.3.b,c.

Biểu đồ M_z của thanh là tổng đại số hai biểu đồ trên (H.9.3.d).

**H.9.3**

Nhận xét: Dấu của nội lực là dương khi từ ngoài nhìn vào đầu thanh thấy ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại.

3- Công thức chuyển đổi công suất động cơ ra ngẫu lực xoắn (mômen xoắn ngoại lực) trên trục

Khi tính toán các trục truyền động, thường ta chỉ biết công suất truyền của mô tơ tính bằng mã lực hay kilôoát và tốc độ trục quay bằng vòng/phút, do đó cần chuyển đổi công suất truyền ra ngẫu lực xoắn tác dụng lên trục.

Giả sử có một ngẫu lực xoắn M_o (đơn vị là N.m) tác dụng làm trục quay một góc α (radian) trong thời gian t , công sinh ra là:

$$A = M_o \cdot \alpha \quad (i)$$

công suất là:
$$W = \frac{A}{t} = \frac{M_o \alpha}{t} = M_o \frac{\alpha}{t} = M_o \omega \quad (ii)$$

trong đó: ω - là vận tốc góc (rad/s), đơn vị của công suất là N.m/s.

Gọi n là số vòng quay của trục trong một phút (vòng/phút), ta có:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (iii)$$

từ (ii) và (iii) $\Rightarrow$

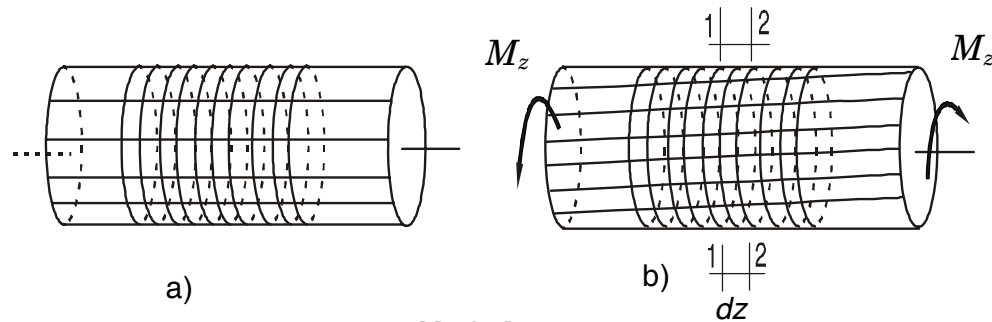
a) Nếu W tính bằng mã lực (CV, HP) ; 1 mã lực = 750 N.m/s = 0,736 kW:

$$M_o = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30 \cdot 750 \cdot W}{\pi n} = 7162 \frac{W}{n} \text{ (Nm)} \quad (9.1)$$

b) Nếu W tính bằng kilôwat (KW), 1 KW $\approx$ 1020 N.m/s:

$$M_o = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30 \cdot 1020 \cdot W}{\pi n} = 9740 \frac{W}{n} \text{ (Nm)} \quad (9.2)$$

II. XOẮN THUẦN TÚY THANH THẲNG TIẾT DIỆN TRÒN



H. 9.4

1- Thí nghiệm - Nhận xét

Lấy một thanh thẳng tiết diện tròn, trên mặt ngoài có vạch những đường song song và những đường tròn thẳng góc với trục, tạo thành lưới ô vuông (H.9.4.a). Tác dụng lên hai đầu thanh hai ngẫu lực xoắn M_z ngược chiều, ta thấy trục thanh vẫn thẳng, chiều dài thanh không đổi, những đường tròn thẳng góc với trục vẫn tròn và thẳng góc với trục, những đường song song với trục thành những đường xoắn ốc, lưới ô vuông thành lưới bình hành (H.9.4.b).

2- Các giả thiết

- a) Mặt cắt ngang vẫn phẳng, thẳng góc với trục thanh và khoảng cách không đổi trong quá trình biến dạng,
- b) Các bán kính vẫn thẳng và không đổi trong quá trình biến dạng,.
- c) các thớ dọc không ép và đẩy lẫn nhau trong quá trình biến dạng.

3- Công thức ứng suất tiếp

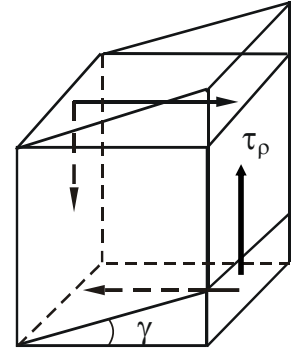
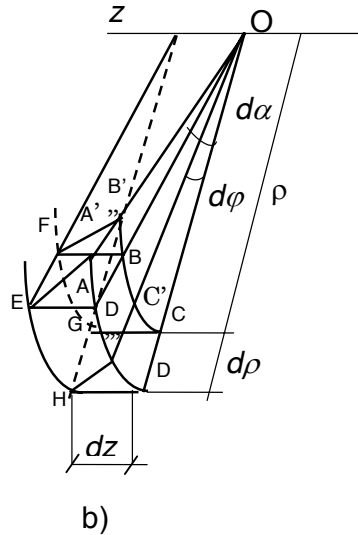
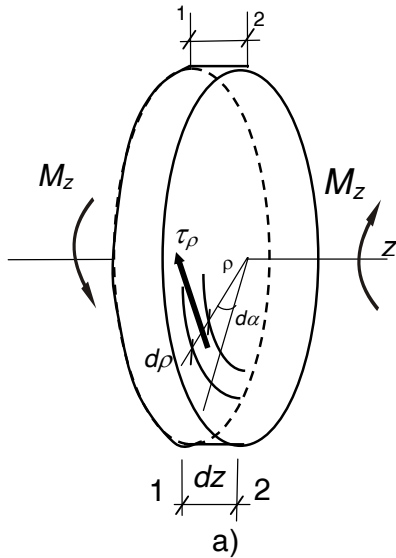
Ta tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có bán kính ρ (H.9.1).

Có thể nhận thấy, theo thí nghiệm trên, biến dạng của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ là sự xoay tương đối giữa các mặt cắt ngang quanh trục.

Để xét biến dạng xoắn của một phân tố tại một điểm bất kỳ bán kính trong thanh, ta tách phân tố bằng ba cặp mặt cắt như sau:



H. 9.1



H. 9.6
Phân tử trượt thuần túy

H. 9.5 Biến dạng của phân tử chịu xoắn

- Hai mặt cắt (1-1) và (2-2) thẳng góc với trục cách nhau đoạn dz (H.9.5.a).
- Hai mặt cắt chứa trục hợp với nhau một góc $d\alpha$ bé (H.9.5.b).
- Hai mặt cắt hình trụ đồng trục z (trục thanh) bán kính ρ và $\rho + d\rho$ (H.9.5.a).

Theo các giả thiết, trong quá trình biến dạng, so với các điểm E, F, G, H thuộc mặt cắt (1-1), các điểm A, B, C, D của phân tử trên mặt cắt (2-2) di chuyển đến A', B', C', D' phải nằm trên cung tròn bán kính ρ và $\rho + d\rho$, đồng thời OA'B' và OC'D' phải thẳng hàng.

Gọi $d\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng OAB và OA'B', đó là góc xoay của mặt cắt (2-2) so với mặt cắt (1-1) quanh trục z , $d\varphi$ cũng chính là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện lân cận cách nhau dz .

Đối với phân tử đang xét, góc A'EA biểu diễn sự thay đổi góc vuông của mặt bên phân tử gọi là biến dạng trượt (góc trượt) γ của phân tử.

Từ (H.9.5.b), ta có:

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{AA'}{EA} = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (a)$$

Theo giả thiết a) không có biến dạng dài theo phương dọc trục, theo giả thiết c) các thớ dọc không tác dụng với nhau nên không có ứng suất pháp tác dụng lên các mặt của phân tố.

Theo giả thiết a) các góc vuông của mặt CDHG và mặt BAEF không thay đổi nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, C, D. Do giả thiết b), mọi bán kính vẫn thẳng nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, E, F.

Như vậy, trên mặt cắt ngang của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ tồn tại ứng suất tiếp theo phương vuông góc bán kính, gọi là τ_ρ và phân tố đang xét ở trạng thái trượt thuần túy (H.9.6).

Áp dụng định luật Hooke về trượt cho phân tố này, ta có:

$$\tau_\rho = G \gamma \quad \text{b)}$$

(a) vào (b) $\Rightarrow$

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{(c)}$$

Gọi dF là một diện tích vô cùng bé bao quanh điểm đang xét, thì $\tau_\rho \cdot dF$ là lực tiếp tuyến tác dụng trên diện tích đó và $\tau_\rho \cdot dF \cdot \rho$ là mômen của lực $\tau_\rho dF$ đối với tâm O. Tổng các mômen này phải bằng M_z , nên ta có thể viết:

$$M_z = \int_F \tau_\rho dF \rho \quad \text{(d)}$$

$$\text{(c) vào (d)} \Rightarrow M_z = \int_F G\rho \frac{d\varphi}{dz} dF \rho \quad \text{(e)}$$

Vì $G \cdot d\varphi/dz$ là hằng số đối với mọi điểm thuộc mặt cắt F , nên ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, khi đó tích phân $\int_F \rho^2 \cdot dF$ chính là mômen quán tính cực J_ρ của mặt cắt ngang đối với tâm O, ta được:

$$M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_\rho \quad \text{(f)}$$

$$\text{từ (f) ta có: } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \quad \text{(g)}$$

Có thể thấy rằng, $d\varphi/dz$ chính là góc xoắn trên một đơn vị chiều dài (còn gọi là **góc xoắn tỉ đối**) (rad/m). Đặt $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, ta có:

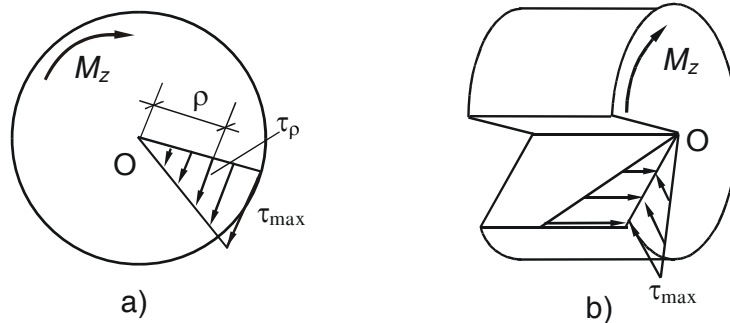
$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \quad \text{(9-3)}$$

thay (g) vào (c) ta được công thức tính ứng suất tiếp:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_{\rho}} \rho \quad (9.4)$$

Ứng suất tiếp thay đổi theo quy luật bậc nhất, bằng không tại tâm O và cực đại tại những điểm trên chu vi.

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt ngang thể hiện trên H.9.7.a. Trên H.9.7.b, thể hiện ứng suất tiếp đối ứng trên các mặt cắt chứa trục.



H.9.7. Phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt
Và ứng suất tiếp đối ứng

Ứng suất tiếp cực đại ở các điểm trên chu vi ($\rho =$ bán kính R)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_{\rho}} R$$

đặt: $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R}$; W_{ρ} gọi là **mômen chống xoắn** của mặt cắt ngang

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\rho}} \quad (9.5)$$

* Với tiết diện tròn đặc và D là đường kính tiết diện:

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3 \quad (9.6)$$

* Với tiết diện tròn rỗng:

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R} = \frac{\pi D^4 (1 - \eta^4)}{32} \frac{1}{R} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) \approx 0,2 D^3 (1 - \eta^4) \quad (9.7)$$

trong đó: η là tỷ số giữa đường kính trong và đường kính ngoài ($\eta = d/D$).

4- Công thức tính biến dạng khi xoắn

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau dz là $d\varphi = \frac{M_z}{GJ_\rho} dz$ (g)

$\Rightarrow$ Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn dài L là:

$$\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{M_z}{GJ_\rho} dz \quad (9.8)$$

* Khi đoạn thanh có M_z/GJ_ρ là hằng số $\Rightarrow \varphi = \frac{M_z L}{GJ_\rho}$ (9.9)

* Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_ρ là hằng số:

$$\varphi = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_\rho} \right)_i \quad (9.10)$$

Góc xoắn φ được quy ước dương theo chiều dương của M_z .

5- Tính toán thanh tròn chịu xoắn thuần túy:

Điều kiện bền:

$$+ \quad \tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_o}{n} \quad (9.11)$$

với: τ_o - là ứng suất tiếp nguy hiểm của vật liệu, xác định từ thí nghiệm
 n - là hệ số an toàn.

+ Theo thuyết bền ứng suất tiếp (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (9.12)$$

+ Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (9.13)$$

Điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad (9.14)$$

$[\theta]$: Góc xoắn tỷ đối cho phép, được cho từ các sổ tay kỹ thuật, đơn vị của $[\theta]$ là (radian/ đơn vị chiều dài)

Ba bài toán cơ bản:

- Kiểm tra bền, cứng (bài toán kiểm tra)
- Xác định tải trọng cho phép
- Xác định đường kính (bài toán thiết kế).

6- Thế năng biến dạng đàn hồi

Thế năng riêng tích lũy trong một đơn vị thể tích là:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Thanh chịu xoắn thuần túy, TTUS trượt thuần túy với ứng suất tiếp τ , nên $\sigma_1 = |\tau|$; $\sigma_2 = 0$ và $\sigma_3 = -|\tau|$, ta được:

$$u = \frac{1+\mu}{E} \tau^2 \quad (a)$$

với: $E = 2G/(1 + \mu)$, thay vào (a), ta được:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad (b)$$

Thế năng tích lũy trong một đoạn dz là:

$$dU = \int_V u dV = \int_F u dF dz \quad (c)$$

thay (b) vào (c), ta được:

$$dU = \int_F \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dF dz = \int_F \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_p^2} \rho^2 \frac{dF dz}{G} = \frac{1}{2G} \frac{M_z^2}{J_p^2} dz \int_F \rho^2 dF$$

hay:
$$dU = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GJ_p} dz \quad (d)$$

Vậy thế năng trên đoạn thanh có chiều dài L là:

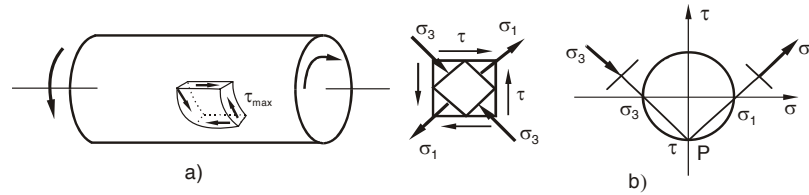
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{GJ_p} dz \quad (9.15)$$

+ Khi đoạn thanh có M_z/GJ_p là hằng số $\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 L}{GJ_p} \quad (9.16)$

+ Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_p là hằng số

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{M_z^2 L}{GJ_p} \right)_i \quad (9.17)$$

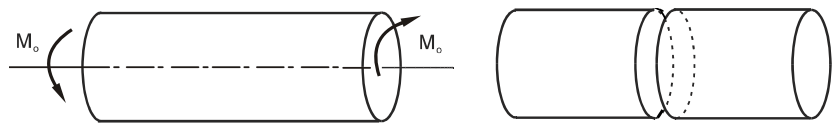
7- Dạng phá hỏng của các vật liệu



H. 9.8 Trạng thái ứng suất tại một điểm trên mặt ngoài của thanh chịu xoắn

Nghiên cứu trạng thái ứng suất của trục tròn chịu xoắn, ta thấy tại một điểm trên mặt ngoài, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy chịu ứng suất tiếp cực đại $\tau_{\max}$ (H.9.a), ở trạng thái này, theo hai phương nghiêng 45° so với trục có ứng suất kéo chính và ứng suất nén chính $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$ (H.9.8.b).

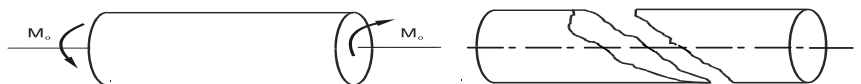
Mặt khác, qua thí nghiệm, ta cũng biết rằng vật liệu dẻo (như



H. 9.9 Dạng nứt gãy của vật liệu dẻo

thép) chịu kéo, chịu nén tốt như nhau, còn chịu cắt thì kém hơn, do đó, khi một trục thép bị xoắn sẽ bị gãy theo mặt cắt ngang, do ứng suất tiếp $\tau_{\max}$ trên mặt cắt ngang (H.9.9).

Với vật liệu giòn như gang, chịu nén và chịu

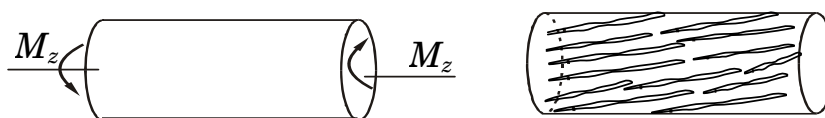


H. 9.10 Dạng nứt gãy của vật liệu giòn

cắt rất tốt, còn chịu

kéo rất kém nên khi xoắn sẽ bị gãy theo mặt nghiêng 45° so với trục do ứng suất kéo chính σ_1 (H.9.10).

Với vật liệu có cấu tạo thớ như gỗ, chịu cắt dọc thớ rất kém nên khi xoắn sẽ bị nứt dọc theo đường sinh do ứng suất ứng suất tiếp đối ứng với ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang (H.9.11).



H. 9.11 Dạng nứt gãy của gỗ chịu xoắn

Thí dụ 9.3 Một động cơ công suất 10kW, truyền một mômen xoắn lên một trục tròn đường kính D tại tiết diện A, vận tốc trục $n = 1400$ vg/phút. Giả sử hiệu suất truyền là 100%. Khi đó tại tiết diện B, C nhận được công suất truyền 3kW và 7kW (H.9.12.a). Định đường kính D , sau đó tính góc xoắn φ_{AC} . Biết: $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$; $[\theta] = 0,25^\circ/\text{m}$; $a = 50\text{cm}$; $G = 8.10^3 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

♦ Gọi ngẫu lực xoắn tác dụng tại A, B, C lần lượt là M_1, M_2, M_3 . Áp dụng công thức chuyển đổi, ta được:

$$M_1 = 9740 \times 10 / 1400 = 69,57 \text{ N.m} = 6957 \text{ Ncm}$$

$$M_2 = 9740 \times 3 / 1400 = 20,87 \text{ N.m} = 2087 \text{ Ncm}$$

$$M_3 = 9740 \times 7 / 1400 = 48,70 \text{ N.m} = 4870 \text{ Ncm}$$

Sơ đồ tính của trục ở (H.9.12.b), biểu đồ mômen vẽ ở (H.9.12.c).

♦ **Định đường kính D:**

+ Theo điều kiện bền $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \Rightarrow \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2D^3} \leq [\tau] \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2.[\tau]}}$

với: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$;

$$M_z = 4870 \text{ Ncm}$$

$$\Rightarrow D \geq 14,49 \text{ cm} \quad (\text{a})$$

+ Theo điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \Rightarrow \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{M_z}{G.0,1D^4} \leq [\theta]$$

$$\Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{G.0,1.[\theta]}}$$

với: $[\theta] = 0,25^\circ/\text{m}$

$$= \frac{0,25 \times \pi}{180 \times 10^{-2}} \text{ rad/cm};$$

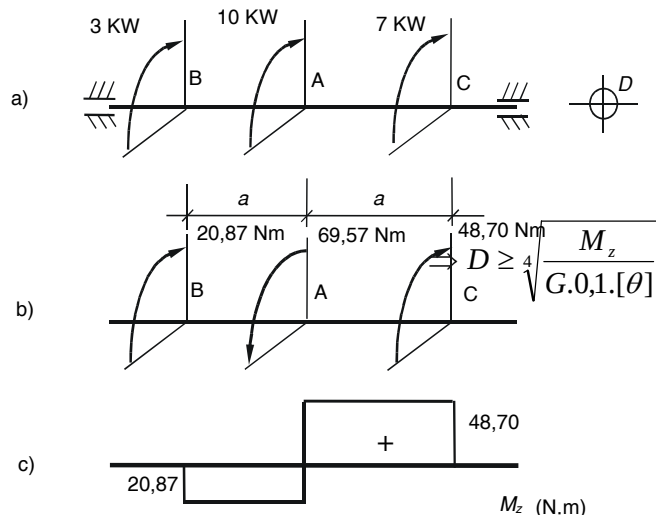
$$M_z = 4870 \text{ Ncm};$$

$$G = 8.10^3 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow D \geq 11,17 \text{ cm} \quad (\text{b})$$

Để thỏa cả hai yêu cầu (a), (b), ta chọn $D = 15 \text{ cm}$.

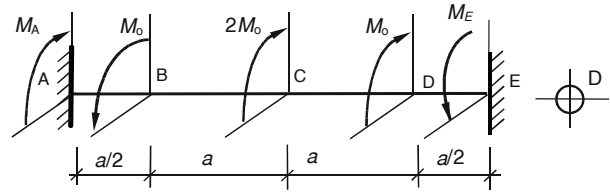
♦ **Tính góc xoắn φ_{AC} :** Áp dụng công thức (9.6), ta được:

$$\varphi_{AC} = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_p} \right)_i = \frac{4870 \times 50}{8 \times 10^3 \times 0,1 \times 15^4} = 0,006 \text{ rad}$$



H. 9.12

Thí dụ 9.4 Một thanh tiết diện tròn đường kính D hai đầu ngàm chịu lực như (H.9.13). Vẽ biểu đồ M_z và định giá trị M_o theo điều kiện bền.



H. 9.13

Giải: Ngoại lực là mômen

xoắn trong mặt phẳng thẳng góc với trục thanh thì phản lực phát sinh tại các liên kết ngàm A và E phải là các mômen xoắn M_A , M_E trong các mặt phẳng thẳng góc với trục thanh. Giả sử M_A , M_E có chiều như trên H.9.13.

Để xác định mômen phản lực, viết phương trình cân bằng $\Sigma M/z = 0$, ta có:

$$M_A - M_o + 2M_o + M_o - M_E = 0 \quad (a)$$

Phương trình (a) không đủ để định được phản lực M_A , M_E : **Bài toán siêu tĩnh.**

Cần bổ sung một (hay nhiều) phương trình thiết lập từ điều kiện biến dạng của bài toán (**phương trình điều kiện biến dạng**).

Thường cách giải như sau:

+ Tưởng tượng bỏ ngàm E, thay bằng phản lực tương ứng M_E (H.9.15.a).

+Viết phương trình điều kiện biến dạng: $\varphi_E = 0$

(Tại E liên kết ngàm $\Rightarrow$ do đó góc xoay $\varphi_E = 0$)

+Tính φ_E : Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, biểu đồ mômen xoắn do từng trường hợp tải gây ra được vẽ ở H.9.15.b. Tính φ_E theo (9.10) như sau:

$$\varphi_E = \varphi_{EA} = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_p} \right) = -\frac{M_E \cdot 3a}{GJ_p} + \frac{M_o \cdot 5a}{GJ_p} + \frac{2M_o \cdot 3a}{GJ_p} - \frac{M_o \cdot a}{GJ_p}$$

+ Cho $\varphi_E = 0$, ta được : $M_E = \frac{5}{3} M_o$

Kết quả dương, M_E đúng chiều chọn.

+ Xác định được M_E , ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn M_z như H.9.15.c.

Từ biểu đồ nội lực M_z , ta thấy: $M_{z,\max} = (5/3)M_o$.

Từ điều kiện bền, ta có:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{M_{z,\max}}{0,2.D^3} \leq [\tau]$$

$$\Rightarrow \frac{5M_o}{3.0,2.D^3} \leq [\tau] \Rightarrow M_o \leq [\tau] \frac{3.0,2.D^3}{5}$$

III. XOẮN THANH THẲNG TIẾT DIỆN CHỮ NHẬT

Thí nghiệm xoắn thanh tiết diện chữ nhật, biến dạng của thanh như (H.9.16).

Lý thuyết đàn hồi cho các kết quả như sau:

♦ **Ứng suất:** Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp.

+ Tại tâm và các góc, ứng suất tiếp bằng không.

+ Tại điểm giữa cạnh dài, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn

nhất :
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (9.18)$$

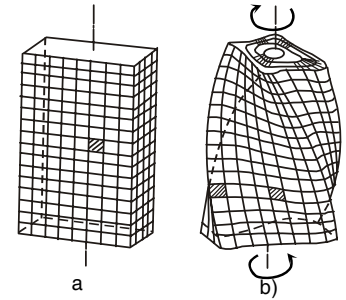
+ Tại điểm giữa cạnh ngắn, ứng suất τ_1 bé hơn: $\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (9.19)$

+ Phân bố ứng suất tiếp tại các điểm trên các trục đối xứng, các cạnh tiết diện và các đường chéo được biểu diễn ở H.9.17.

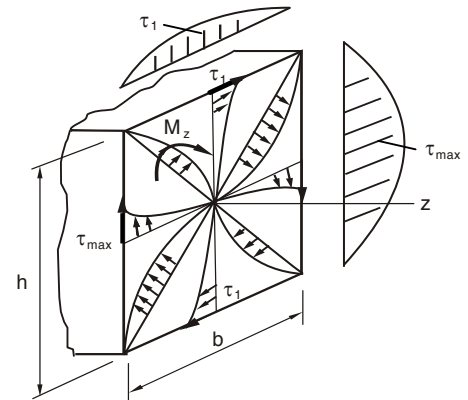
♦ **Góc xoắn tương đối:**

$$\theta = \frac{M_z}{\beta h b^3} \quad (9.20)$$

trong đó: α, γ, β là các hệ số phụ thuộc tỷ số (cạnh dài h / cạnh ngắn b) được cho trong bảng 1.



H. 9.16 Sự vênh của tiết diện chữ nhật khi xoắn



H. 9.17 Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật

Bảng 9.1 Giá trị α, γ, β

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,203	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

IV. TÍNH Lò XO HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN CHỊU LỰC DỌC TRỰC

Lò xo là một bộ phận được dùng rộng rãi trong kỹ thuật, được lắp đặt tại những chỗ cần giảm chấn do tải trọng động như đế móng thang máy, hệ thống nhún trong ô tô, để mô tơ công suất lớn...

Lò xo hình trụ được cấu tạo bằng cách quấn một sợi dây thép tiết diện vuông, chữ nhật hoặc tròn quanh một lõi hình trụ, ta chỉ tính lò xo chịu lực theo phương trục của hình trụ này; trục của hình trụ cũng là trục của lò xo, ngoài ra chỉ xét lò xo có các vòng gần nhau gọi là lò xo hình trụ bước ngắn (H.9.18.a).

1- Các đặc trưng của lò xo:

- + d : Đường kính dây lò xo.
- + D : Đường kính trung bình lò xo.
- + n : Số vòng làm việc của lò xo.
- + G : Mô đun đàn hồi trượt của vật liệu làm lò xo.

2- Ứng suất trong dây lò xo:

Dùng một mặt cắt chứa trục của lõi hình trụ cắt qua một sợi dây lò xo, tách lò xo làm hai phần, xét điều kiện cân bằng của một phần lò xo như trên H.9.18.b, ta được:

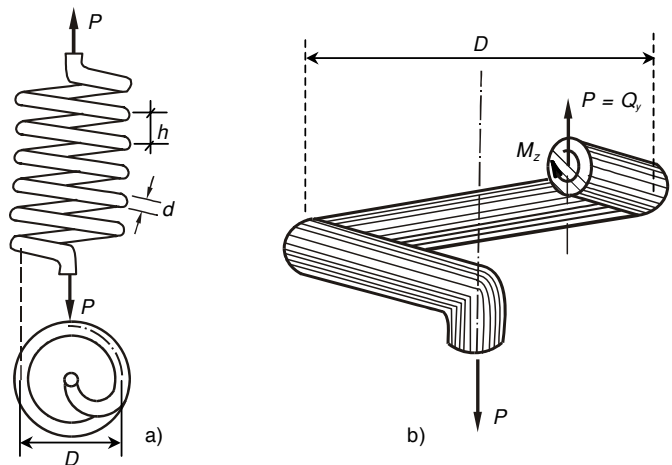
$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\Sigma M / o = 0 \Rightarrow M_z = P \cdot \frac{D}{2}$$

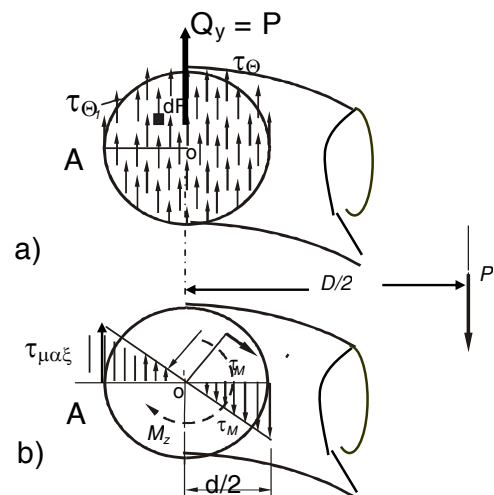
Trên mặt cắt đang xét (xem như mặt cắt ngang của dây lò xo) có lực cắt Q_y và mômen xoắn M_z , chúng đều gây ứng suất tiếp:

$$\tau = \tau_M + \tau_Q$$

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang, các thành phần ứng suất được biểu diễn như (H.9.19). Bỏ qua độ nghiêng của dây lò xo, coi tiết diện đang xét là tròn, có thể thấy



H. 9.18. a) Các đặc trưng của lò xo
b) Nội lực trên tiết diện dây lò xo



H. 9.19 Nội lực và ứng suất trên mặt cắt dây lò xo

rằng, tại mép trong của mặt cắt dây lò xo, điểm A trên H.9.19, ứng suất tiếp đạt giá trị cực đại, dù lực P là tác dụng kéo hay nén lò xo.

Một cách gần đúng, ứng suất tiếp tại điểm nguy hiểm có thể tính như sau:

$$\tau_{\max} = \tau_Q + \tau_M = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_z}{W_p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right) \approx \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.21)$$

Thực chất τ_Q không phân bố đều, còn công thức tính τ_M như trên không chính xác vì tiết diện không tròn do độ nghiêng của dây lò xo cũng như sợi dây lò xo không là thanh thẳng, cho nên trong tính toán thực hành, kể đến kết quả do thực nghiệm, ta có thể lấy:

$$\tau_{\max} = k \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \quad \text{với} \quad k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1} \quad (9.22)$$

2- Biến dạng của lò xo: Tính độ co, dãn λ của lò xo khi chịu lực dọc trục.

Dùng nguyên lý bảo toàn năng lượng, bỏ qua các mất mát năng lượng, **công ngoại lực T hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng đàn hồi U .** Ta có:

+ Công của ngoại lực P trên độ co, dãn λ của lò xo là: $T = \frac{1}{2} P \lambda$ (a)

+ Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong lò xo (bỏ qua thế năng do Q_y):

$$U = \frac{1}{2} \sum \frac{M_z^2 L}{GJ_p}$$

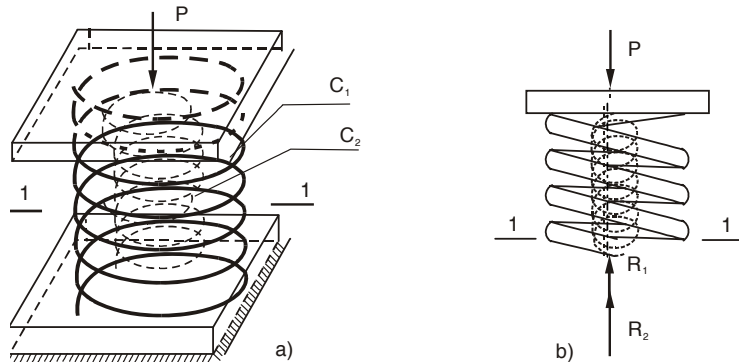
$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 D^2}{4} \frac{\pi D n}{G \pi d^4 / 32} = \frac{1}{2} \frac{8 P^2 D^3 n}{G d^4} \quad (b)$$

về giá trị, $T = U, \Rightarrow \lambda = \frac{8 P D^3 n}{G d^4} = \frac{P}{C} \quad (9.24)$

với: $C = \frac{G d^4}{8 D^3 n} \quad (9.25)$

trong đó: C - là độ cứng của lò xo

Thí dụ 9.5 Hai lò xo có độ cứng $C_1 = 8 \text{ kN/cm}$ và $C_2 = 5 \text{ kN/cm}$ cùng chiều cao H , được ghép đồng trục, cùng chịu lực $P = 50 \text{ kN}$ (H.9.20.a). Tính lực tác dụng trên từng lò xo, tính chuyển vị của điểm đặt lực.



H. 9.20 a) Hai lò xo ghép đồng trục
b) Nội lực trong lò xo

Giải.

Cắt 2 lò xo bằng mặt cắt (1-1), xét cân bằng phần trên, gọi nội lực của lò xo là R_1, R_2 , (H.9.20.b),

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = P \quad (a)$$

Một phương trình chứa hai ẩn số, ta gặp **bài toán siêu tĩnh**.

Điều kiện biến dạng: độ co ngắn của lò xo 1 phải bằng lò xo 2:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (b)$$

$$\frac{R_1}{C_1} = \frac{R_2}{C_2} \Rightarrow R_1 = \frac{C_1}{C_2} R_2 \quad (c)$$

(c) và (a) $\Rightarrow$

$$R_2 = \frac{P}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} P \quad (d)$$

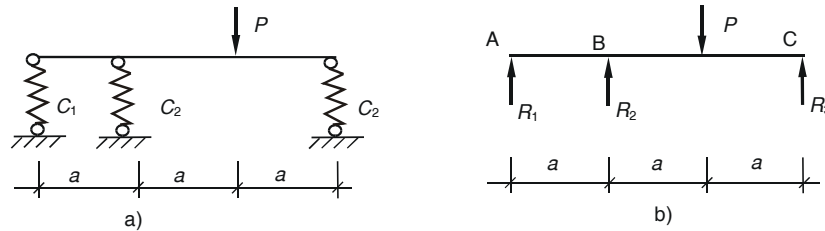
$$R_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P$$

thay giá trị P, C_1, C_2 vào (d): $R_1 = 30,77 \text{ kN}; R_2 = 19,23 \text{ kN}$

Chuyển vị của điểm đặt lực chính là độ co của lò xo 1 hoặc lò xo 2

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = R_1 / C_1 = 30,77 / 8 = 3,85 \text{ cm}.$$

Thí dụ 9.6 Một thanh có EJ rất lớn được xem là bằng ∞ , được đặt trên ba lò xo có độ cứng lần lượt là $C_1 = 5 \text{ kN/cm}$, $C_3 = C_2 = 10 \text{ kN/cm}$ chịu tác dụng của lực $P = 50 \text{ kN}$ như trên H.9.21.a. Tìm lực tác dụng trên các lò xo, tính góc nghiêng của thanh ABC. Cho $a = 50 \text{ cm}$.



H. 9.21 a) Thanh ABC tuyệt đối cứng đặt trên ba lò xo
b) Ngoại lực và các phản lực của các lò xo

Giải.

Gọi phản lực của các lò xo lần lượt là R_1, R_2, R_3 (H.9.21.b).

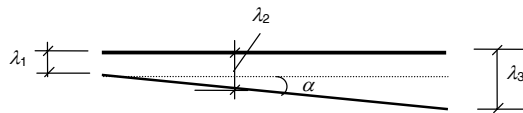
Điều kiện cân bằng:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = P \quad (a)$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -R_2 \cdot a - R_3 \cdot 3a + P \cdot 2a = 0$$

hay: $R_2 + 3R_3 = 2P \quad (b)$

Điều kiện biến dạng: giả sử, dưới tác dụng của ngoại lực, thanh ABC có vị trí mới như ở (H.9.22):



H. 9.22 Sơ đồ chuyển vị của thanh ABC và biến dạng của các lò xo

Ta có: $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 \Rightarrow \frac{R_2}{C_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{C_1} + \frac{1}{3}\frac{R_3}{C_3} \quad (c)$

Giải hệ (a), (b), (c), ta được phản lực của các lò xo, cũng chính là lực tác dụng lên các lò xo: $R_1 = \frac{P}{9}; R_2 = \frac{1}{3}P; R_3 = \frac{5}{9}P$

Từ đó, ta tính được biến dạng của các lò xo:

$$\lambda_1 = 1,11 \text{ cm}; \lambda_2 = 1,67 \text{ cm}; \lambda_3 = 2,78 \text{ cm}$$

Góc nghiêng của thanh ABC là:

$$\tan \alpha \approx \alpha = (\lambda_3 - \lambda_1)/3a = 0,0111 \text{ rad}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1 Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại đầu tự do của thanh tiết diện tròn có khoan lỗ dọc trục như H.9.1. Cho:

$$M_0 = 360 \text{ Nm}; a = 50 \text{ cm};$$

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2, d = 3 \text{ cm}.$$

9.2 Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra độ bền và độ cứng của trục tròn (H.9.2). Biết: $a = 40 \text{ cm}$

$$[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2; [\theta] = 0,5^\circ/\text{m};$$

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2; M_0 = 1 \text{ kNm};$$

Tính góc xoắn tại B và C.

9.3 Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục tròn như trên H.9.3.

Cho: $G = \text{hằng số}.$

9.3 Một trục chịu xoắn như H.9.4.

Xác định ứng suất tiếp $\tau_{\max}$ của trục AB, góc xoắn φ_{AB} , nội lực trong hai thanh CD và CE. Cho: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2, G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2;$

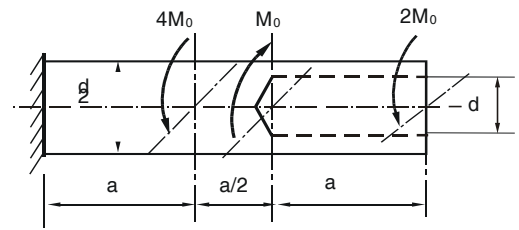
$$M = 2 \text{ kNm}; a = 2 \text{ cm}; F = 4 \text{ m}^2; d = 6 \text{ cm}.$$

Xem puli tại C là tuyệt đối cứng.

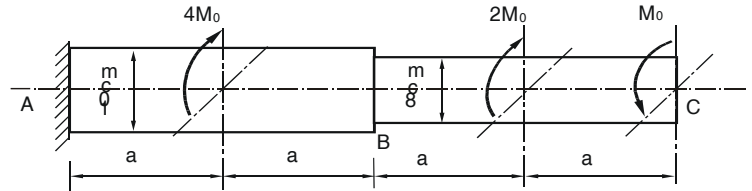
9.5 Một trục truyền động tiết diện tròn, đường kính d . Tại puli A, trục nhận được công suất truyền 15 kW. Giả sử hiệu suất truyền là 1, khi đó tại các puli B, C, H trục truyền đi các công suất lần lượt là 4kW, 8kW và 3kW (H.9.5). Tính d theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

$$\text{Cho: } [\tau] = 2 \text{ kN/cm}^2; [\theta] = 0,4^\circ/\text{m};$$

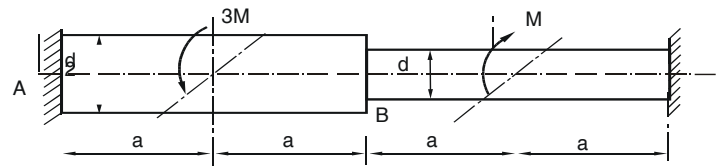
$$G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2; \text{tốc độ mô tơ } n = 150 \text{ vg/ph}.$$



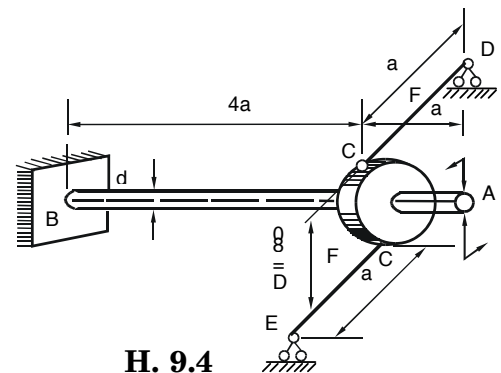
H. 9.1



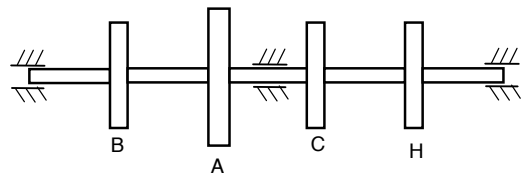
H. 9.2



H. 9.3

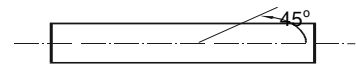


H. 9.4



H. 9.5

9.6 Trên mặt ngoài của một trục tròn chịu xoắn thuần túy, người ta dùng tấm điện trở và đo được biến dạng dài tương đối theo phương 45° so với trục là $\varepsilon = 30 \cdot 10^{-5}$ (H. 9.6)

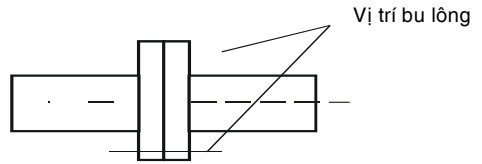


H. 9.6

Tính mômen xoắn tác dụng lên trục.

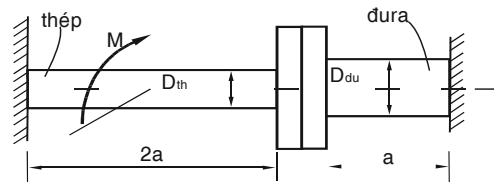
Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.

9.7 Người ta nối hai trục cùng đường kính $D = 8 \text{ cm}$ bằng mặt bích và bốn bu lông $\phi 20$ bố trí đối xứng trên đường tròn đường kính 20 cm (H.9.7). Tính mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên trục theo điều kiện bền của trục và bu lông. Cho: $[\tau]_{tr} = 4 \text{ kN/cm}^2$; $[\tau]_{bl} = 2 \text{ kN/cm}^2$.



H. 9.7

9.8 Hai trục tròn bằng thép và duralumin được nối với nhau bằng mặt bích và bu lông chịu một mômen xoắn M như (H.9.8). Tính mômen xoắn nội lực tác dụng lên hai trục.

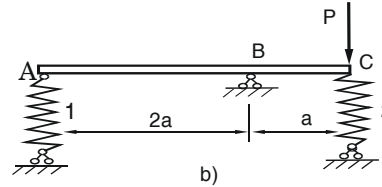
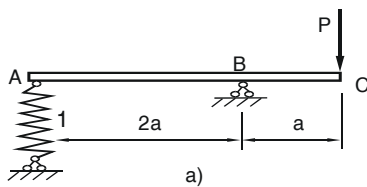


H. 9.8

Cho: $G_{th} = 2G_{dura}$; $D_{dura} = 1,5D_{th}$.

9.9 Hệ chịu lực như ở H.9.9.a,b

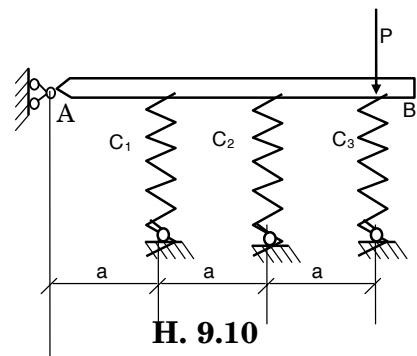
Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2. Tính chuyển vị đứng tại C, xem thanh ABC là tuyệt đối cứng. Biết: $D_1 = 6 \text{ cm}$; $d_1 = 1 \text{ cm}$; $n_1 = 10$; $D_2 = 5 \text{ cm}$; $d_2 = 0,8 \text{ cm}$; $n_2 = 8$; $P = 1 \text{ kN}$; $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$



H. 9.9

9.10 Một thanh tuyệt đối cứng AB được đặt trên ba lò xo có cùng số vòng và chịu một lực P đặt ở đầu B như trên H.9.10. Tính lực tác dụng lên các lò xo. Tính chuyển vị đứng tại B. Cho:

$C_3 = 2C_2 = 2C_1 = 2 \text{ kN/cm}$; $P = 1 \text{ kN}$; $a = 1 \text{ m}$.



H. 9.10

Chương 10

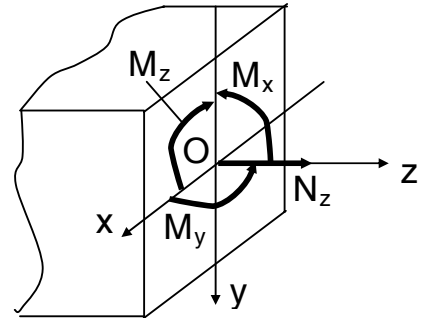
THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

10.1 KHÁI NIỆM

♦ Định nghĩa

Thanh chịu lực phức tạp khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của nhiều thành phần nội lực như lực dọc N_z , mômen uốn M_x , M_y , mômen xoắn M_z (H.10.1).

Khi một thanh chịu lực phức tạp, ảnh hưởng của lực cắt đến sự chịu lực của thanh rất nhỏ so với các thành phần nội lực khác nên trong tính toán không xét đến lực cắt.



H.10.1

2- Cách tính toán thanh chịu lực phức tạp

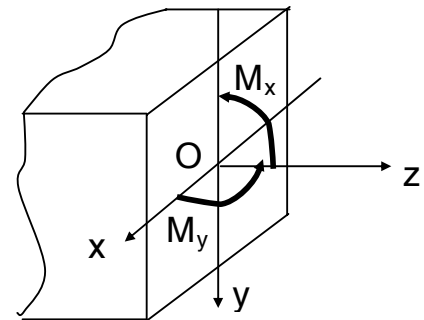
Áp dụng Nguyên lý cộng tác dụng

Nguyên lý cộng tác dụng: Một đại lượng do nhiều nguyên nhân đồng thời gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do tác động của các nguyên nhân riêng lẻ (Chương 1)

10.2 THANH CHỊU UỐN XIÊN

1- Định nghĩa – Nội lực

Thanh chịu uốn xiên khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực là mômen uốn M_x và mômen uốn M_y tác dụng trong các mặt phẳng $yo z$ và xoz (H.10.2).



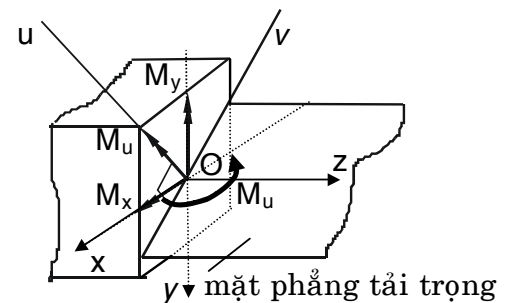
H.10.2

Dấu của M_x , M_y :

$M_x > 0$ khi căng thớ $y > 0$

$M_y > 0$ khi căng thớ $x > 0$

Theo Cơ học lý thuyết, ta có thể biểu diễn mômen M_x và M_y bằng các véc tơ mômen M_x và M_y (H.10.3); Hợp hai mômen này là mômen tổng M_u . M_u nằm trong mặt phẳng voz , mặt phẳng này thẳng góc với trục u (chứa véc tơ mômen M_u) và chứa trục thanh (H.10.3).



H.10.3 Mômen tổng
và mặt phẳng tải trọng

Mặt phẳng tải trọng là mặt phẳng chứa M_u .

Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang là **Đường tải trọng** (trục v)

Ký hiệu α : Góc hợp bởi trục x và đường tải trọng; Ta có

$$|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.1)$$

$$\tan \alpha = \frac{M_x}{M_y} \quad (10.2)$$

Định nghĩa khác của uốn xiên: Thanh chịu uốn xiên khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một mômen uốn M_u tác dụng trong mặt phẳng chứa trục mà không trùng với **mặt phẳng quán tính chính trung tâm** yOz hay xOz .

Đặc biệt, đối với thanh tiết diện tròn, mọi đường kính đều là trục chính trung tâm (trục đối xứng), nên bất kỳ mặt phẳng chứa trục thanh nào cũng là mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Do đó, mặt cắt ngang thanh tròn luôn luôn chỉ chịu uốn phẳng.

2- Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

Theo nguyên lý cộng tác dụng, tại một điểm $A(x,y)$ bất kỳ trên tiết diện, ứng suất do hai mômen M_x, M_y gây ra tính theo công thức sau :

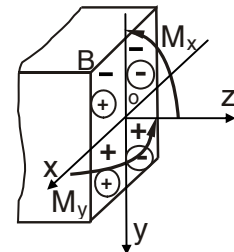
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (10.3)$$

Trong (10.3), số hạng thứ nhất chính là ứng suất pháp do M_x gây ra, số hạng thứ hai là ứng suất pháp do M_y gây ra

Công thức (10.3) là công thức đại số, vì các mômen uốn M_x, M_y và tọa độ điểm $A(x,y)$ có dấu của chúng

Trong tính toán thực hành, thường dùng công thức kỹ thuật như sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (10.4)$$



H.10.4 Biểu diễn các miền kéo, nén trên mặt cắt do M_x, M_y gây ra

Trong (10.4), lấy dấu cộng (+) hay (-) tùy theo điểm tính ứng suất nằm ở miền chịu kéo hay nén do từng nội lực gây ra

H.10.4 biểu diễn các miền kéo, nén trên mặt cắt do các mômen uốn M_x, M_y gây ra : + , - do M_x

(+), (-) do M_y

Thí dụ 1. Tiết diện chữ nhật $b \times h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$ chịu uốn xiên (H.10.5), cho $M_x = 8 \text{ kNm}$ và $M_y = 5 \text{ kNm}$. Chiều hệ trục chọn như h.10.5a

Ứng suất pháp tại B ($x_B = +10 \text{ cm}$; $y_B = -20 \text{ cm}$)

+ Tính theo (10.3) như sau:

$$\sigma_B = \frac{800}{\frac{20(40)^3}{12}}(-20) + \frac{500}{\frac{40(20)^3}{12}}(10) \text{ kN/cm}^2$$

+ Tính theo (10.4) như sau:

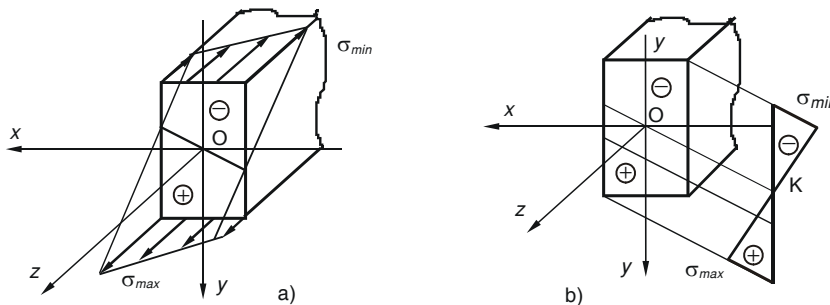
M_x gây kéo những điểm nằm dưới Ox và gây nén những điểm trên Ox ;
 M_y gây kéo phía trái Oy và gây nén phía phải Oy .

Biểu diễn vùng kéo bằng dấu (+) và vùng nén bằng dấu (-) trên tiết diện (H.10.4a) ta có thể thấy, tại điểm B; M_x gây nén; M_y gây kéo.

$$\Rightarrow \sigma_B = -\frac{800}{\frac{20(40)^3}{12}}(20) + \frac{500}{\frac{40(20)^3}{12}}(10) \text{ kN/cm}^2$$

3- Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất

Công thức (10.3) là một hàm hai biến, nó có đồ thị là một mặt phẳng trong hệ trục $Oxyz$. Nếu biểu diễn giá trị ứng suất pháp σ_z cho ở (10.3) bằng các đoạn thẳng đại số theo trục z định hướng dương ra ngoài mặt cắt (H.10.6a), ta được một mặt phẳng chứa đầu mút các vectơ ứng suất pháp tại mọi điểm trên tiết diện, gọi là *mặt ứng suất* (H.10.6.a).



Hình 10.6

a) Mặt ứng suất; b) Biểu đồ ứng suất phẳng

Gọi giao tuyến của mặt ứng suất và mặt cắt ngang là **đường trung hòa**, ta thấy, **đường trung hòa là một đường thẳng và là quỹ tích của những điểm trên mặt cắt ngang có trị số ứng suất pháp bằng không.**

Cho biểu thức $\sigma_z = 0$, ta được phương trình đường trung hòa:

$$\frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x \quad (10.5)$$

Phương trình (10.5) có dạng $y = ax$, **đường trung hòa là một đường thẳng qua gốc tọa độ, và có hệ số góc tính theo công thức:**

$$\tan \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (10.5)$$

Ta thấy:

- Đường trung hòa chia tiết diện làm hai miền: miền chịu kéo và miền chịu nén.

- Những điểm nằm trên những đường thẳng song song với đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất.

- Càng xa đường trung hòa, trị số ứng suất của các điểm trên một đường thẳng vuông góc đường trung hòa tăng theo luật bậc nhất.

Dựa trên các tính chất này, có thể biểu diễn sự phân bố bằng biểu đồ ứng suất phẳng như sau.

Kéo dài đường trung hòa, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường trung hòa tại K, ứng suất tại mọi điểm trên đường trung hòa ($\sigma_z = 0$) biểu diễn bằng điểm K trên đường chuẩn. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, điểm nào có chân hình chiếu xa K nhất là những điểm chịu ứng suất pháp lớn nhất.

- Điểm xa nhất thuộc miền kéo chịu ứng suất kéo lớn nhất, gọi là $\sigma_{\max}$.

- Điểm xa nhất thuộc miền nén chịu ứng suất nén lớn nhất, gọi là $\sigma_{\min}$.

Tính $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ rồi biểu diễn bằng hai đoạn thẳng về hai phía của đường chuẩn rồi nối lại bằng đường thẳng, đó là biểu đồ ứng suất phẳng, trị số ứng suất tại mọi điểm của tiết diện trên đường thẳng song song với đường trung hòa chính là một tung độ trên biểu đồ ứng suất xác định như ở (H.10.6.b).

4- Ứng suất pháp cực trị và điều kiện bền

• **Ứng suất pháp cực trị:** Gọi $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ là hai điểm xa đường trung hòa nhất về phía chịu kéo và chịu nén, công thức (10.4) cho:

$$\begin{aligned} \sigma_A = \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{J_x}|y_A| + \frac{|M_y|}{J_y}|x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= -\frac{|M_x|}{J_x}|y_B| - \frac{|M_y|}{J_y}|x_B| \end{aligned} \quad (10.6)$$

Đối với thanh có tiết diện chữ nhật ($b \times h$), điểm xa đường trung hoà nhất luôn luôn là các điểm góc của tiết diện, khi đó:

$$|x_A| = |x_B| = \frac{h}{2}; \quad |y_A| = |y_B| = \frac{b}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.7)$$

với:

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{6}; \quad W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{hb^3}{6}$$

• **Đối với thanh có tiết diện tròn**, khi tiết diện chịu tác dụng của hai mômen uốn M_x, M_y trong hai mặt phẳng vuông góc yOz, xOz , mômen tổng là M_u tác dụng trong mặt phẳng vOz cũng là mặt phẳng quán tính chính trung tâm, nghĩa là chỉ chịu uốn phẳng, do đó:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; \quad W_u = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3 \quad (10.8)$$

• **Điều kiện bền:** trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp, đó là trạng thái ứng suất đơn, hai điểm nguy hiểm là hai điểm chịu $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$, tiết diện bền khi hai điểm nguy hiểm thỏa điều kiện bền:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (10.9)$$

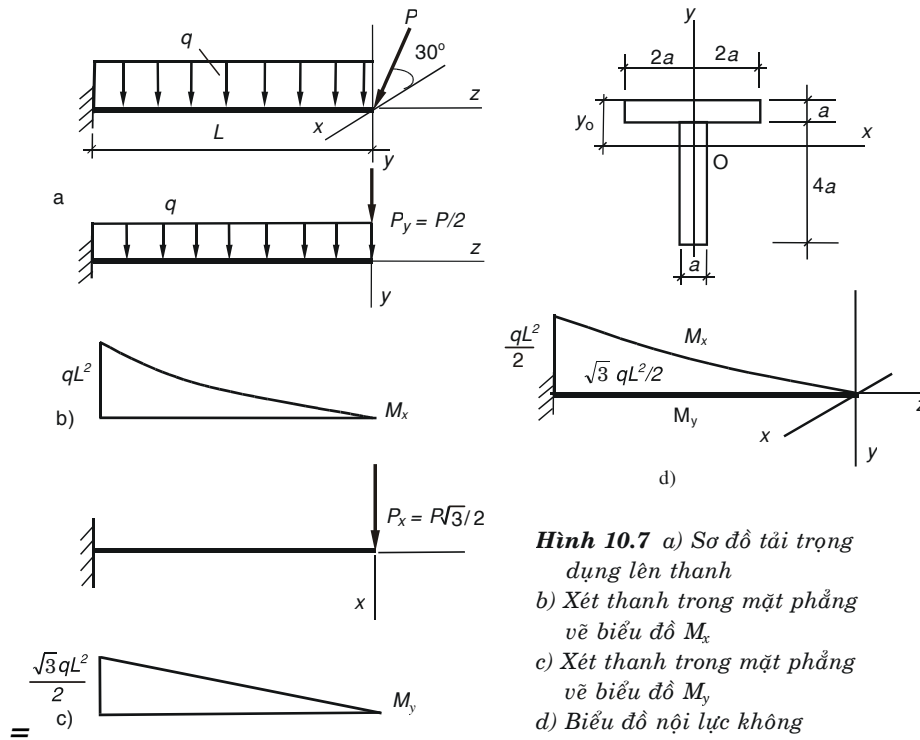
Đối với vật liệu dẻo: $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$, điều kiện bền được thỏa khi:

$$\max |\sigma_{\max}, \sigma_{\min}| \leq [\sigma] \quad (10.8)$$

Thí dụ 2. Một dầm tiết diện chữ T chịu lực như trên H.10.7.a. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường trung hoà tại tiết diện ngàm, tính ứng suất $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$. Cho: $q = 4 \text{ kN/m}$; $P = qL$; $L = 2 \text{ m}$; $a = 5 \text{ cm}$. Các đặc trưng của tiết diện chữ T được cho như sau: $y_o = 7a/4$, $J_x = 109a^4/6$; $J_y = 34a^4/6$.

Giải. Phân tích lực P thành 2 thành phần trên hai trục x và y , ta được:

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = P\sqrt{3}/2 = qL\sqrt{3}/2; \quad P_y = P \cdot \sin 30^\circ = P/2$$



Xét thanh chịu lực trong từng mặt phẳng riêng lẻ.

Trong mặt phẳng (yOz), hệ chịu lực phân bố và lực tập trung P_y , biểu đồ mômen vẽ trên H.10.7.b, theo quy ước, biểu đồ này là M_x . Tương tự, trong mặt phẳng (xOz), hệ chịu lực phân bố và lực tập trung P_y , biểu đồ mômen vẽ trên H.10.7.c, đó là M_y .

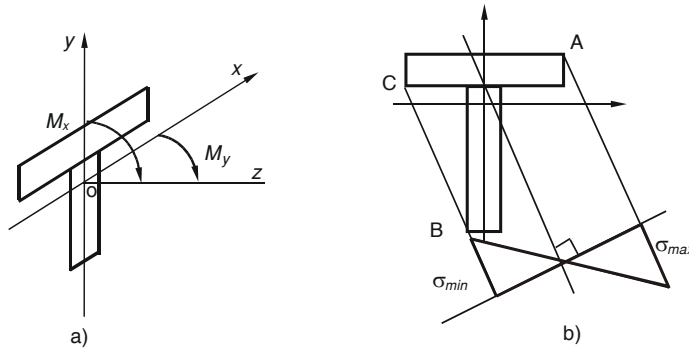
Phương trình đường trung hòa: $y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x$ (a)

Tại tiết diện ngàm: $M_x = qL^2/2$; $M_y = \sqrt{3} qL^2/2$

Chiều M_x và M_y biểu diễn ở H.10.5.d, nếu chọn chiều dương của trục x và y như trên H.10.8.a thì trong (a), các mômen uốn đều có dấu +.

Ta có: $y = - \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{qL^2/2} \cdot \frac{109a^4/6}{34a^4/6} x = -2,77 \cdot x$ (b)

Biểu diễn tiết diện bằng hình phẳng theo tỷ lệ, từ (b) có thể vẽ chính xác đường trung hòa, áp dụng cách vẽ biểu đồ ứng suất, ta cũng vẽ được biểu đồ ứng suất phẳng (H.10.8.b).



Hình 10.8

- a) Chọn chiều dương của trục x, y .
b) Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất phẳng

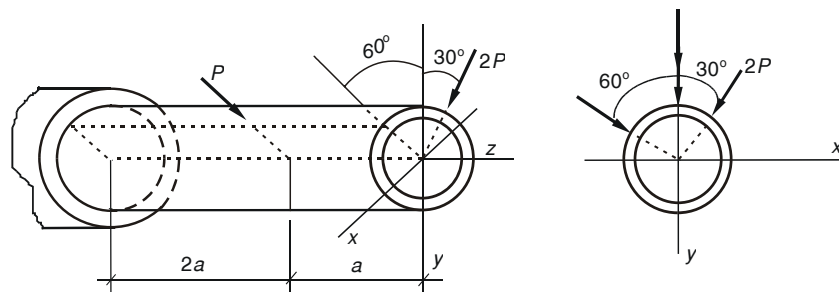
Dựa trên biểu đồ ứng suất ta có thể tìm thấy điểm chịu kéo nhiều nhất là điểm A ($|x_A| = 2a, |y_A| = 7a/4$), điểm chịu nén nhiều nhất là điểm C ($|x_B| = 2a, |y_B| = 3a/4$); điểm B ($|x_B| = a/2, |y_B| = 13a/4$) có chân hình chiếu khá gần C, cần tính ứng suất tại đây.

Áp dụng công thức (10.4), ta có:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = +\frac{qL^2}{I_x} \left(\frac{7a}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{I_y} (2a) = 5,145 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

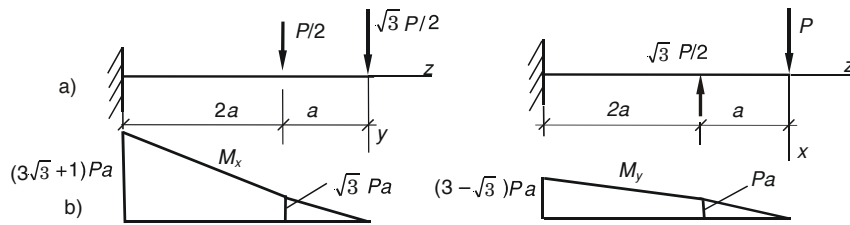
$$\sigma_C = \sigma_{\min} = +\frac{qL^2}{I_x} \left(\frac{3a}{4} \right) - \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{I_y} (2a) = -3,384 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Thí dụ 3. Một thanh tiết diện tròn rỗng chịu tác dụng của ngoại lực (H.10.9). Tính ứng suất pháp $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, xác định đường trung hoà tại tiết diện ngàm.



Hình 10.9 Thanh tiết diện tròn rỗng chịu tải trong hai mặt phẳng khác

Giải. Phân tích lực $2P$ và lực P lên hai trục vuông góc x, y . Lần lượt xét sự làm việc của thanh trong từng mặt phẳng yOz, xOz , ta vẽ được biểu đồ mômen M_x, M_y tương ứng (H.10.10b).



Hình 10.10 Biểu đồ mômen biểu diễn trong hai mặt phẳng vuông góc

Với thanh tiết diện tròn, khi có hai mômen uốn M_x , M_y tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc yOz , xOz , ta có thể đưa về một mômen uốn phẳng M_u trong tác dụng mặt phẳng quán tính chính trung tâm vOz , với: M_u là mômen tổng của M_x và M_y .

Tại tiết diện ngàm, M_x , M_y có giá trị lớn nhất, ta có:

$$|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 9,475 Pa$$

Theo công thức của uốn phẳng, ta được:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \pm \frac{9,475 Pa}{\frac{\pi D^3}{32} (1 - \frac{d^4}{D^4})} = \pm \frac{9,475 Pa}{\frac{\pi \cdot 10^3}{32} (1 - \frac{8^4}{10^4})} = \pm 8,41 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

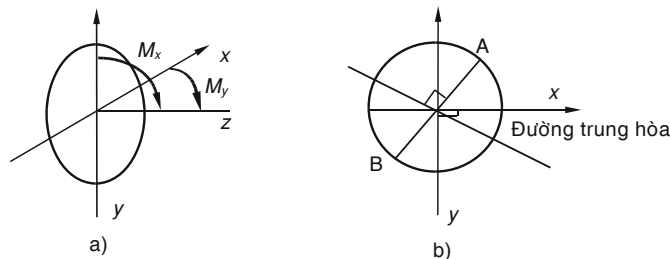
Phương trình đường trung hòa:

$$y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x \quad (a)$$

Tại tiết diện ngàm: $M_x = (3\sqrt{3} + 1)Pa = 6,196 Pa$

chiều M_x và M_y biểu diễn ở H.10.11.a, nếu chọn chiều dương của trục x và y về phía gây kéo của M_y và M_x (H.10.11.a) thì trong (a), giá trị của các mômen uốn lấy trị tuyệt đối.

Ta có: $y = \frac{1,268 Pa}{6,196 Pa} \cdot (1) \cdot x = -0,204 x \quad (b)$



Hình 10.11

a) Định hướng hệ trục x, y ; b) Vẽ đường trung hòa trên hình phẳng

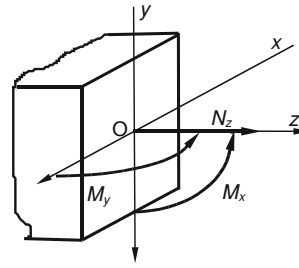
Đường trung hòa được vẽ trên hình phẳng (H.10.11b), nếu vẽ một đường thẳng qua tâm O, thẳng góc với đường trung hòa, giao điểm của đường này với chu vi là hai điểm chịu ứng suất kéo và nén lớn nhất.

10.3 THANH CHỊU UỐN CỘNG KÉO (HAY NÉN)

1- Định nghĩa

Thanh chịu uốn cộng kéo (hay nén) đồng thời khi trên các mặt cắt ngang nội lực là mômen uốn M_u và lực

M_u là mômen uốn tác dụng chứa trục z , luôn luôn có thể mômen uốn M_x và M_y trong mặt



Hình 10.11 Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang

(hay nén) đồng có các thành phần dọc N_z .

trong mặt phẳng phân thành hai phẳng đối xứng

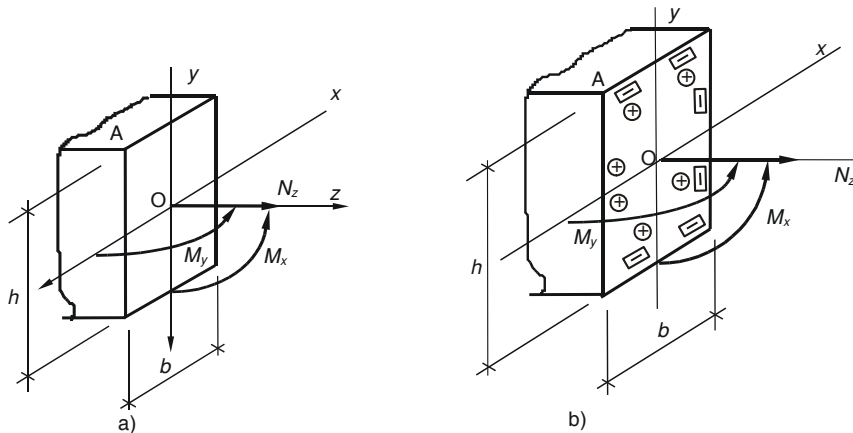
2- Công thức ứng suất pháp

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta thấy bài toán đang xét là tổ hợp của thanh chịu uốn xiên và kéo (hay nén) đúng tâm. Do đó, tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ (x,y) chịu tác dụng của ứng suất pháp tính theo công thức sau:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (10.9)$$

Ứng suất pháp gây kéo được quy ước dương.

Các số hạng trong công thức (10.9) là số đại số, ứng suất do N_z lấy (+) khi lực dọc là kéo và ngược lại lực nén lấy dấu trừ; ứng suất do M_x, M_y lấy dấu như trong công thức (10.1) của uốn xiên, nếu định hướng trục y, x dương về phía gây kéo của M_x, M_y thì lấy theo dấu của y và x .



Hình 10.12

a) Định hướng hệ trục x, y khi dùng công thức (9.9)

b) Định dấu cộng trừ khi dùng công thức (9.10)

Khi tính toán thực hành, ta cũng có công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (10.10)$$

Trong công thức (10.10), ứng với mỗi số hạng, ta lấy dấu (+) nếu đại

lượng đó gây kéo và ngược lại.

Ví dụ, đối với tiết diện trên H.10.12.a, cho $M_x = 10 \text{ kNm}$; $M_y = 5 \text{ kNm}$; $N_z = 10 \text{ kN}$; $h = 2b = 40 \text{ cm}$, tính ứng suất tại A.

Sử dụng công thức (10.9), chọn chiều dương trục x, y như H.10.12.a, $x_A = 10$, $y_A = -20$, ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20 \cdot 40} + \frac{1000}{20 \cdot 40^3 : 12} (-20) + \frac{500}{40 \cdot 20^3 : 12} (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

Để áp dụng công thức (10.10), có thể biểu diễn tác dụng gây kéo, nén của các thành phần nội lực như ở (H.10.12.b), với $|x_A| = 10$, $|y_A| = 20$, ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20 \cdot 40} - \frac{1000}{20 \cdot 40^3 : 12} (20) + \frac{500}{40 \cdot 20^3 : 12} (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

3- Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất pháp

Tương tự như trong uốn xiên, có thể thấy rằng phương trình (10.9) là một hàm hai biến $\sigma_z = f(x, y)$, nếu biểu diễn trong hệ trục $Oxyz$, với O là tâm mặt cắt ngang và σ_z định hướng dương ra ngoài mặt cắt, thì hàm (10.9) biểu diễn một mặt phẳng, gọi là mặt ứng suất, giao tuyến của nó với mặt cắt ngang là đường trung hòa. Dễ thấy rằng, đường trung hòa là một đường thẳng chứa tất cả những điểm trên mặt cắt ngang có ứng suất pháp bằng không. Từ đó, cho $\sigma_z = 0$, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{N_z}{A} \frac{I_x}{M_x} \quad (10.11)$$

Phương trình (10.11) có dạng $y = ax + b$, đó là một đường thẳng không qua gốc tọa độ, cắt trục y tại tung độ $b = -\frac{N_z \cdot I_x}{A \cdot M_x}$.

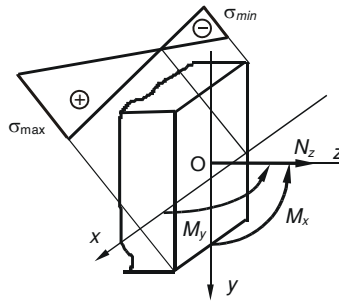
Để sử dụng (10.11) thuận lợi, ta nên định hướng trục x, y như khi sử dụng công thức (10.9), còn N_z vẫn lấy dấu theo quy ước lực dọc.

Mặt khác, do tính chất mặt phẳng ứng suất, những điểm nằm trên những đường song song đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất, những điểm xa đường trung hòa nhất có giá trị ứng suất lớn nhất, ứng suất trên một đường vuông góc với đường trung hòa thay đổi theo quy luật bậc nhất.

Rõ ràng đường trung hòa chia tiết diện thành hai miền, miền chịu ứng suất kéo và miền chịu ứng suất nén. Nhờ các tính chất này, có thể biểu diễn

sự phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang bằng *biểu đồ ứng suất phẳng* như sau.

Kéo dài đường trung hòa ra ngoài tiết diện, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường kéo dài tại điểm O, đó cũng là điểm biểu diễn giá trị ứng suất pháp tại mọi điểm trên đường trung hòa. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, chiếu mọi điểm trên những đường song song chuẩn, điểm có chịu ứng suất pháp



Hình 10.13 Định hướng hệ trục x, y khi dùng công thức 9.11

Điểm xa nhất về miền kéo lớn nhất, gọi là $\sigma_{\max}$, miền nén chịu ứng suất nén. Biểu diễn giá trị $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ về hai phía đường chuẩn rồi đường thẳng, ta được biểu đồ ứng suất phẳng (H.10.13).

kéo chịu ứng suất điểm xa nhất về lớn nhất, gọi là $\sigma_{\min}$. bằng các tung độ nổi chúng lại bằng

4. Ứng suất pháp cực trị và điều kiện bền

Gọi $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ là hai điểm xa đường trung hoà nhất về miền kéo và về miền nén, áp dụng (10.10), ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị.

$$\begin{aligned}\sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{I_x} |y_A| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{I_x} |y_B| - \frac{|M_y|}{I_y} |x_B|\end{aligned}\quad (10.12)$$

Theo (10.12), ta thấy, khi ứng suất do lực dọc trái dấu với ứng suất do M_x , M_y và có trị số lớn hơn tổng trị số tuyệt đối các ứng suất do M_x , M_y , đường trung hoà nằm ngoài mặt cắt, trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất một dấu (chỉ chịu kéo hoặc chỉ chịu nén).

- Với thanh có tiết diện chữ nhật, các điểm nguy hiểm A, B luôn luôn là các điểm góc của tiết diện:

$$\begin{aligned}|x_A| = |x_B| &= b/2; \quad |y_A| = |y_B| = h/2 \\ \sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}\end{aligned}\quad (10.13)$$

- Thanh có tiết diện tròn, mômen tổng của M_x , M_y là M_u gây uốn thuần túy phẳng, khi đó ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị:

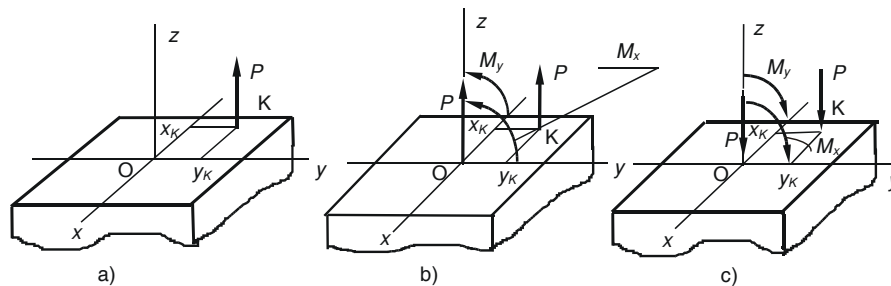
$$\begin{aligned}\sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_u|}{W_u} \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_u|}{W_u} \\ M_u &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\end{aligned}\quad (10.13)$$

Thanh chịu uốn cộng kéo hay nén đồng thời chỉ gây ra ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, tại điểm nguy hiểm, phân tố ở trạng thái ứng suất đơn, do đó điều kiện bền của thanh là:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (10.14)$$

5- Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm

Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm khi ngoại lực hay nội lực tác dụng trên mặt cắt ngang tương đương một lực P song song trục thanh mà không trùng với trục thanh. Nếu lực P này hướng vào mặt cắt, thanh chịu nén lệch tâm, ngược lại, nếu lực P hướng ra, thanh chịu kéo lệch tâm (H.10.14.a).



Hình 10.14

a) Tiết diện bị kéo lệch tâm; b) Dời lực về tâm tiết diện

Trong thực tế, bài toán nén lệch tâm rất thường gặp trong tính toán cột, móng nhà công nghiệp hay dân dụng, trong tính toán trụ, móng cầu tháp...

Áp dụng nguyên lý dời lực, đưa lực kéo hay nén lệch tâm về tâm tiết diện, ta có thể chứng minh hai trường hợp này thực chất là bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời. Trên H.10.14.a, gọi $K(x_K, y_K)$ là điểm đặt lực lệch tâm P , dời về tâm O , ta có:

$$\begin{aligned}N_z &= \pm |P|, \text{ lấy (+) khi } P \text{ là lực kéo, ngược lại, lấy (-).} \\ M_x &= P \cdot y_K \\ M_y &= P \cdot x_K\end{aligned}\quad (10.15)$$

Chiều của mômen lấy theo nguyên lý dôi lực.

Do đó, tất cả công thức đã được thiết lập cho bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời đều áp dụng được cho bài toán kéo hay nén lệch tâm.

6- Lõi tiết diện

Đối với thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, phương trình đường trung hoà có thể viết ở dạng khác. Cho biểu thức σ_z trong (10.9) bằng không, ta được phương trình đường trung hoà:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

Thay : $M_x = N_z \cdot y_K; \quad M_y = N_z \cdot x_K$

$$\frac{N_z}{A} + \frac{N_z \cdot y_K}{I_x} y + \frac{N_z \cdot x_K}{I_y} x = 0$$

$$\frac{N_z}{A} \left[1 + \frac{y_K \cdot F}{I_x} y + \frac{x_K \cdot F}{I_y} x \right] = 0$$

Đặt : $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

$$1 + \frac{y_K \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_K \cdot x}{i_y^2} = 0$$

Đặt: $a = -\frac{i_y^2}{x_K}; \quad b = -\frac{i_x^2}{y_K} \quad (10.16)$

Ta thu được dạng khác của *phương trình đường trung hoà* :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10.17)$$

Từ (10.16), (10.17), ta thấy đường trung hoà có các tính chất sau:

- Đường trung hoà cắt trục x tại a và trục tung tại b.
- Đường trung hoà không bao giờ qua phần tư chứa điểm đặt lực K vì a và b luôn trái dấu với x_K, y_K .
- Điểm đặt lực tiến gần tâm O của tiết diện thì đường trung hoà rời xa tâm vì x_K, y_K giảm thì a, b tăng.
- Khi đường trung hoà nằm ngoài tiết diện, trên tiết diện chỉ chịu ứng suất một dấu: kéo hoặc nén.

Gọi *lõi tiết diện* là khu vực bao quanh tâm sao cho khi lực lệch tâm đặt trong phạm vi đó thì đường trung hoà hoàn toàn nằm ngoài tiết diện.

Với một thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, việc xác định lõi tiết diện có ý nghĩa thực tiễn. Trong thực tế có nhiều loại vật liệu chỉ chịu nén tốt như gạch, đá, gang, bê tông không thép..., nếu chúng chịu nén lệch tâm mà lực nén đặt ngoài lõi tiết diện, ứng suất kéo phát sinh có thể lớn hơn khả năng

chịu kéo của chúng, khi đó vật liệu sẽ bị phá hoại, để tận dụng tốt khả năng chịu lực của vật liệu cần thiết kể đặt lực nén trong lõi tiết diện.

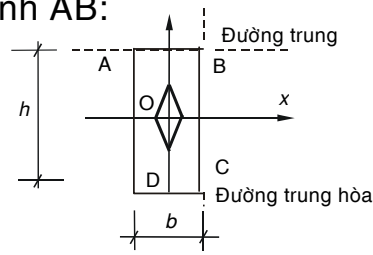
Có thể xác định lõi tiết diện theo cách sau:

Giả sử đường trung hòa tiếp xúc một cạnh tiết diện, từ (10.17) ta viết được phương trình đường trung hòa, rồi từ (10.16) ta suy ra tọa độ điểm đặt lực K tương ứng với vị trí đường trung hòa. Áp dụng cách tương tự đối với tất cả các cạnh còn lại, nối vị trí các điểm đặt lực, ta được lõi tiết diện. Để ý rằng, dù tiết diện là đa giác lõm thì lõi tiết diện luôn là một đa giác lồi.

Ví dụ: tiết diện chữ nhật (H.10.15).

Khi đường trung hòa trùng cạnh AB:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{h/2} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \infty \Rightarrow x_K = 0 \\ -\frac{i_x^2}{y_K} &= \frac{h}{2} \Rightarrow y_K = -\frac{h^2}{12 \cdot \frac{h}{2}} = -\frac{h}{6} \end{aligned}$$



Hình Lõi tiết diện chữ nhật

Khi đường trung hòa trùng cạnh BC:

$$\begin{aligned} \frac{x}{b/2} + \frac{y}{\infty} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \frac{b}{2} \Rightarrow x_K = -\frac{b^2}{12 \cdot b/2} = -\frac{b}{6} \\ -\frac{i_x^2}{y_K} &= \infty \Rightarrow y_K = 0 \end{aligned}$$

Do tính đối xứng của tiết diện, khi đường trung hòa trùng cạnh CD, AD, ta xác định hai điểm K tương ứng có tọa độ lần lượt là:

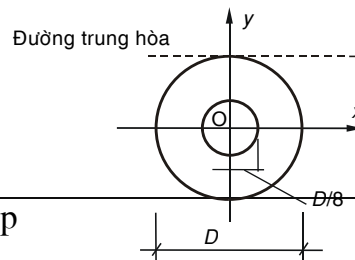
$$x_K = 0; y_K = \frac{h}{6} \text{ và } x_K = \frac{b}{6}; y_K = 0$$

Nối các điểm K, ta được lõi tiết diện của tiết diện chữ nhật là một hình thoi có đỉnh trên trục x,y (H.10.15).

- Tiết diện tròn (H.10.16)

Khi đường trung hòa là một tiếp tuyến với đường tròn tại A:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{D/2} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \infty \Rightarrow x_K = 0; -\frac{i_x^2}{y_K} = D/2 \\ \Rightarrow y_K &= -\frac{\pi D^4}{64 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2}} = -\frac{D}{8} \end{aligned}$$



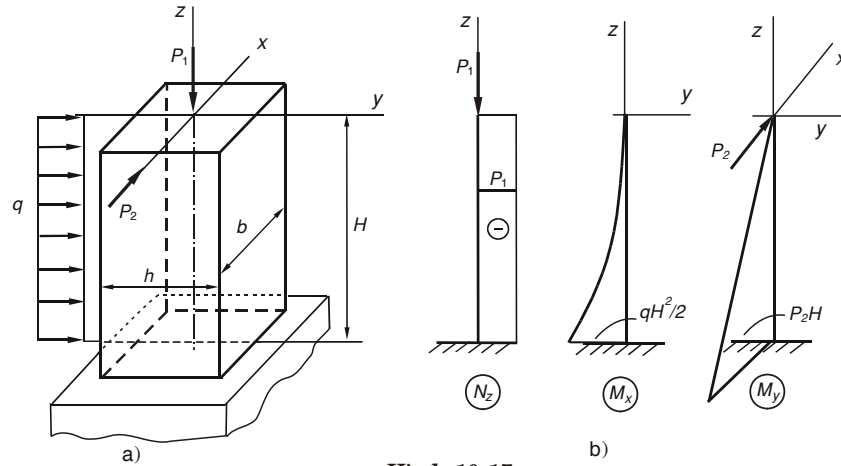
Do tính đối xứng của tiết

diện, ta thấy lõi

tiết diện là một đường tròn đồng tâm đường kính $D/8$.

Ví dụ 10.3 Một thanh tiết diện chữ nhật (b.h), chịu tác dụng của ngoại lực như H.10.17.a. Vẽ biểu đồ nội lực, tính $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$. xác định đường trung hòa tại ngàm.

Cho: $q = 5 \text{ kN/m}$, $P_1 = 100 \text{ kN}$, $P_2 = 6 \text{ kN}$, $H = 6 \text{ m}$, $h = 2b = 40 \text{ cm}$.



Hình 10.17

a) Thanh chịu nén cộng uốn; b) Biểu đồ nội lực

Giải:

Biểu đồ nội lực do từng nguyên nhân gây ra được vẽ trên H.10.17.b.

Tại ngàm, nội lực có giá trị lớn nhất:

$$N_z = -P_1 \text{ (nén)}; \quad M_x = qH^2/2; \quad M_y = P_2.H$$

Áp dụng công thức (10.12):

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P_1}{A} \pm \frac{q.H^2/2}{W_x} \pm \frac{P_2.H}{W_y}$$

Thay số, ta được:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= -\frac{100}{20.40} \pm \frac{5.6^2.100}{2 \cdot \frac{20.40^2}{6}} \pm \frac{6.6 \cdot 100}{40.20^2} \\ &= -0.125 \pm 1,687 \pm 1,350 = \pm \frac{2,912 \text{ kN/cm}^2}{3,162 \text{ kN/cm}^2} \end{aligned}$$

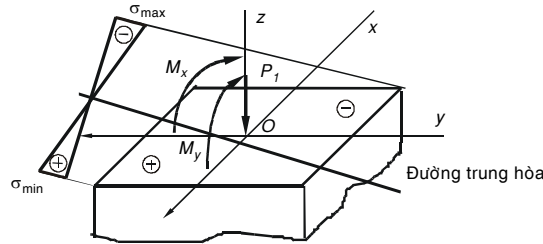
Phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x - \frac{N_z}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} \quad (a)$$

Chọn hệ trục y, x dương về phía gây kéo của M_x và M_y , thay số vào (a) ta được:

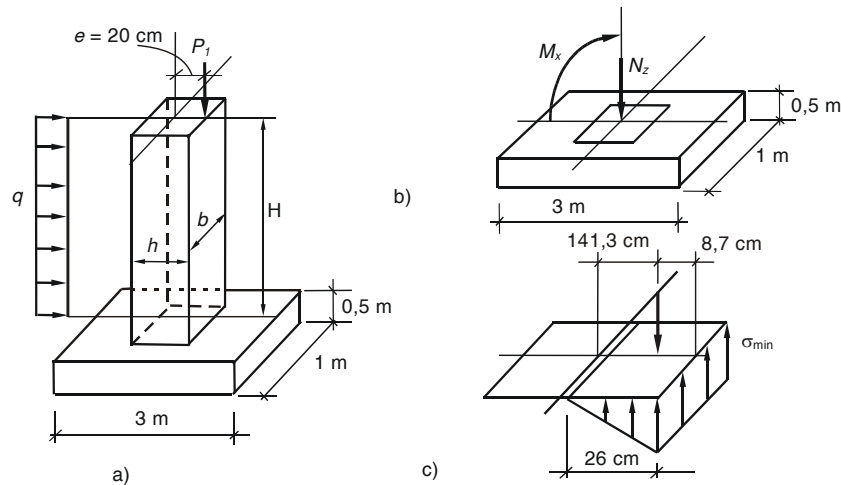
$$y = -\frac{6.6}{5 \cdot \frac{6^2}{2}} \frac{20.40^3/12}{40.20^3/12} \cdot x - \frac{-100}{20.40} \cdot \frac{20.40^3/12}{5 \cdot \frac{6^2}{2} \cdot 100} = -1,6x + 1,48$$

Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất được vẽ trên H.10.18.



Hình 10.18 Đường trung hoà của thanh chịu uốn

Ví dụ 10.4 Một cột chịu nén lệch tâm và lực đẩy của gió như H.10.19.a. xem chân cột bị ngàm. Tính $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$. Nếu khối móng có kích thước $1\text{m} \times 3\text{m} \times 0,5\text{m}$ được đặt như H.10.19.a, hãy tính áp lực lớn nhất trên nền đất. Cho: $P_1 = 50 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $H = 6 \text{ m}$; $h = 2b = 40 \text{ cm}$; $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$.



Hình 10.19 a) Cột chịu nén lệch tâm

b) Nội lực tại tiết diện chân cột; c) Biểu đồ áp lực lên nền đất

Nội lực lớn nhất tại tiết diện ngàm:

$$N_z = -P_1 = -50 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = P_1 \cdot e + q \cdot H^2 / 2 = 50 \cdot 20 + 4 \cdot 6^2 \cdot 100 / 2 = 8200 \text{ kN.cm}$$

Áp dụng công thức (10.12), ứng suất pháp lớn nhất:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P_1}{A} \pm \frac{q \cdot H^2 / 2 + P_1 \cdot e}{W_x} =$$

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{50}{20.40} \pm \frac{8200}{20.40^2 / 6} = -0,0625 \pm 1,537 = \pm \frac{1,47 \text{ kN}}{1,60 \text{ cm}^2}$$

Dời lực về đáy móng, kể thêm trọng lượng bản thân móng và mômen do lực cắt qH, ta được:

$$N_z = -50 - 25.0,5.2.1 = -75 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = 10600 \text{ kNcm.}$$

Tại đáy móng, nếu vật liệu vẫn liên tục, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{N_z}{A} \frac{I_x}{M_x} = -\frac{-75}{100.300} \cdot \frac{100.300^3}{12.10600} = 53,07 \text{ cm}$$

Theo (10.12), ta có ứng suất pháp lớn nhất:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{75}{100.300} \pm \frac{10600}{100.300^2 / 6} = \pm \frac{0,0045 \text{ kN}}{0,0095 \text{ cm}^2}$$

Thực tế, tại đáy móng, vật liệu là đất chỉ chịu nén, không thể chịu ứng suất kéo, do đó, để đảm bảo điều kiện cân bằng, hợp lực của phản lực nền phải cân bằng với ngoại lực tác dụng.

Ngoại lực tại mặt đáy móng gồm một lực nén 75 kN và một mômen $M_x = 10600 \text{ kNcm}$ tương đương một lực nén 75 kN lệch tâm đặt trên trục y với độ lệch tâm là $e = 10600/75 = 141,3 \text{ cm}$, đặt cách mép chịu nén lớn nhất là $150 - 141,3 = 8,7 \text{ cm}$.

Để cân bằng với lực này, hợp lực của phản lực nền phải đối đẳng với lực nén 75 kN, giả sử *phản lực nền phân bố theo quy luật bậc nhất*, phản lực nền phải phân bố trên một diện tích mặt móng $100 \times (3 \times 8,7) = 100 \times 26 \text{ cm}^2$ tính từ mép chịu nén lớn nhất (H10.19.c).

Điều kiện cân bằng cho:

$$\sigma_{\min} \cdot 100.26/2 = 75 \Rightarrow \sigma_{\min} = 0,0577 \text{ kN/cm}^2 = 5,77 \text{ kG/cm}^2$$

Kết quả này cho thấy, do mặt đế móng không được thiết kế sử dụng toàn bộ diện tích mặt móng nên ứng suất nén truyền lên nền tăng lên, móng thiết kế không hợp lý.

10.4 UỐN CỘNG XOẮN

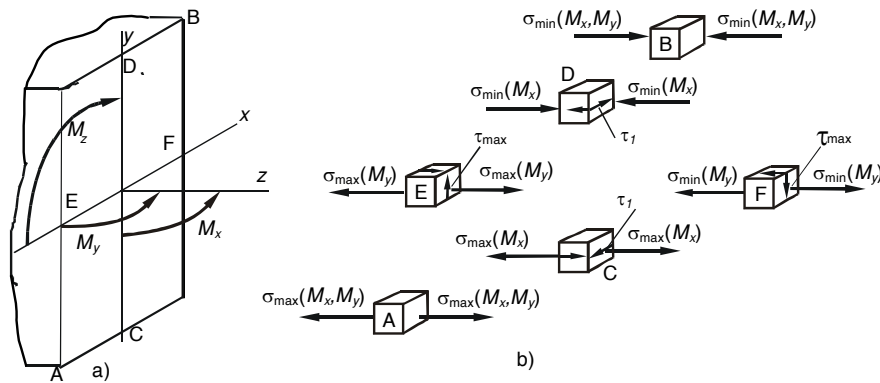
1- Định nghĩa

Thanh chịu uốn cộng xoắn khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của mômen uốn M_u trong mặt phẳng chứa trục thanh và mômen xoắn M_z .

2- Thanh tiết diện chữ nhật

Uốn xoắn thanh tiết diện chữ nhật thường gặp trong công trình dân dụng như lanh tô đỡ ô văng, dầm chịu lực ngoài mặt phẳng đối xứng, thanh chịu uốn trong hệ không gian...

Xét một tiết diện chữ nhật chịu uốn xoắn (H.10.20) trong đó mômen uốn M_u đã được phân tích thành hai mômen uốn M_x, M_y trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm yOz, xOz .



Hình 10.20 a) Các thành phần nội lực của thanh chịu uốn cộng xoắn
b) Trạng thái ứng suất của các phân tố

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về uốn, về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.20.b):

Tại các góc tiết diện (A,B), chỉ có ứng suất pháp lớn nhất do M_x, M_y , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.19)$$

Điều kiện bền: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Tại điểm giữa cạnh ngắn (C,D), chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_x và ứng suất tiếp τ_1 do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x}; \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (10.20)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền thứ 4:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Tại điểm giữa cạnh dài (E,F), chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_y và ứng suất tiếp $\tau_{1\max}$ do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \quad (10.21)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

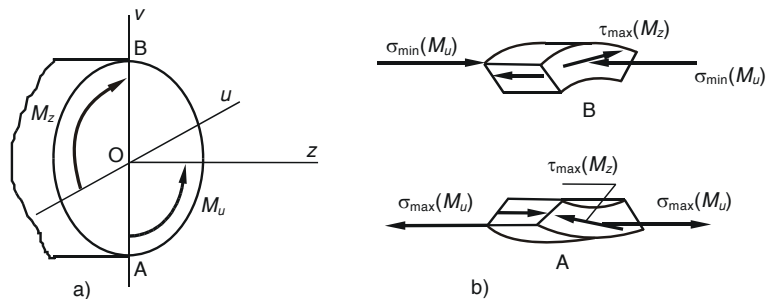
Theo thuyết bền thứ 4:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

3- Tiết diện tròn

Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn đồng thời rất thường gặp khi tính trục truyền động vì quá trình truyền tác dụng xoắn qua các puli luôn kèm theo tác dụng uốn do lực căng dây đai, do trọng lượng bản thân trục, puli...

Xét một thanh tiết diện tròn chịu tác dụng của mômen uốn M_u và mômen xoắn M_z (H.10.21.a). Nếu có nhiều ngoại lực gây uốn tác dụng trong những mặt phẳng khác nhau, ta luôn luôn có thể phân tích chúng thành các thành phần tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc yOz , xOz , từ đó xác định M_x , M_y , sau đó xác định mômen tổng $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.



Hình 10.21 a) Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn
b) Trạng thái ứng suất phân tố

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về uốn, về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.21.b):

Dưới tác dụng của mômen uốn M_u , hai điểm A,B chịu ứng suất pháp lớn nhất $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, ngoài ra, do tác dụng của mômen xoắn M_z , tại hai điểm A, B còn chịu ứng suất tiếp $\tau_{\max}$, đó là hai điểm nguy hiểm nhất trên tiết diện.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sigma_{\max, \min} &= \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \\ \tau_{\max} &= \frac{M_z}{W_p} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Phân tố đang xét vừa chịu ứng suất pháp vừa chịu ứng suất tiếp, đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

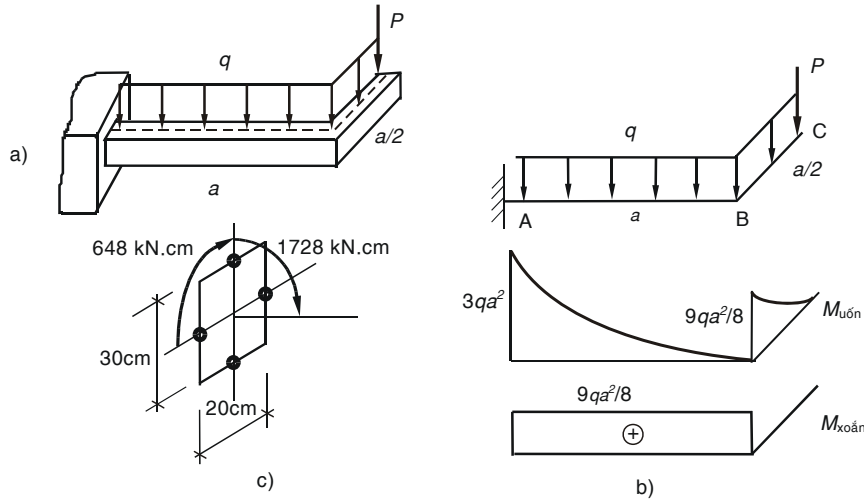
Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền thứ 4:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



Hình 10.22 a) Khung chịu uốn với tải trọng thẳng góc mặt phẳng khung

b) Sơ đồ tính khung và biểu đồ nội lực không gian vẽ theo nguyên lý cộng tác dụng

c) Các điểm nguy hiểm trên tiết diện

Ví dụ 10.5 Một thanh gẫy khúc ABC tiết diện chữ nhật (20cm × 30cm) chịu tác dụng của tải trọng như H.10.22.a. Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra điều kiện bền tại tiết diện ngàm. Cho: $q = 4 \text{ kN/m}$; $P = 2qa$; $a = 1,2 \text{ m}$; $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Biểu đồ nội lực được vẽ trên H.10.22.b, tại tiết diện ngàm chịu nội lực lớn nhất (H.10.22.c):

$$M_x = 3qa^2 = 3.4.(1,2)^2.100 = 1728 \text{ kN.cm}$$

$$M_z = 9qa^2/8 = 9.4.(1,2)^2.100/8 = 648 \text{ kN.cm}$$

Tại trung điểm cạnh ngắn, phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1728}{20.30^2/6} = 0,576 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_1 = \gamma \cdot \tau_{\max} = \gamma \cdot \frac{M_z}{\alpha \cdot h \cdot b^2} = 0,859 \cdot \frac{648}{0,231.30.20^2} = 0,2 \text{ kN/cm}^2$$

Điều kiện bền:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{0,576^2 + 4.0,2^2} = 0,7 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$$

Tại trung điểm cạnh dài, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha \cdot h b^2} = \frac{648}{0,231 \cdot 30 \cdot 20^2} = 0,233 \text{ kN/cm}^2$$

Điều kiện bền: $\tau_{\max} = 0,233 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]/2 = 0,5 \text{ kN/cm}^2$

Ví dụ 10.6 Một trục tròn đường kính d , mang pu li chủ động đường kính D_1 và pu li bị động đường kính D_2 . Mô tơ truyền lực kéo T_1 lên một nhánh dây đai của pu li D_1 làm quay trục, kéo theo pu li D_2 . Coi hiệu suất truyền là 1, lực kéo trên một nhánh dây đai D_2 là $T_2 = T_1 \cdot D_1/D_2$. Ngoài ra, giả sử lực căng ban đầu trên dây đai bằng nửa lực kéo tác dụng lên dây đai. Tính đường kính trục d (H.10.23.a).

Cho: trọng lượng pu li $G_1 = G_2 = 1 \text{ kN}$; $D_1 = 50 \text{ cm}$; $D_2 = 30 \text{ cm}$; $T_1 = 5 \text{ kN}$; $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$. Bỏ qua trọng lượng bản thân của trục.

Giải. Lực căng ban đầu trên dây đai của pu li D_1 là: $T_1/2 = 5/2 = 2,5 \text{ kN}$

Lực kéo truyền lên dây đai D_2 là: $T_2 = T_1 \cdot D_1/D_2 = 5 \cdot 50/30 = 8,33 \text{ kN}$

Lực căng ban đầu trên dây đai D_2 là: $T_2/2 = 8,33/2 = 4,17 \text{ kN}$

Dời lực trên dây đai về tâm của trục, ta có thể đưa ra sơ đồ tính của trục như trên H.10.23.b. Biểu đồ mômen uốn M_x , M_y và mômen xoắn M_z vẽ ở H.10.23.c.

Tại tiết diện đặt pu li D_2 chịu nội lực lớn nhất:

$$M_x = 20 \text{ kN.cm}, M_y = 150 \text{ kN.cm}; M_z = 125 \text{ kN.cm}.$$

Mômen uốn tổng $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 151,32 \text{ kN.cm}$ gây ra ứng suất pháp lớn nhất là:

$$\sigma_z = \frac{M_u}{W_u} = \frac{151,32}{\pi \cdot D^3 / 32} = \frac{1542,1}{D^3}$$

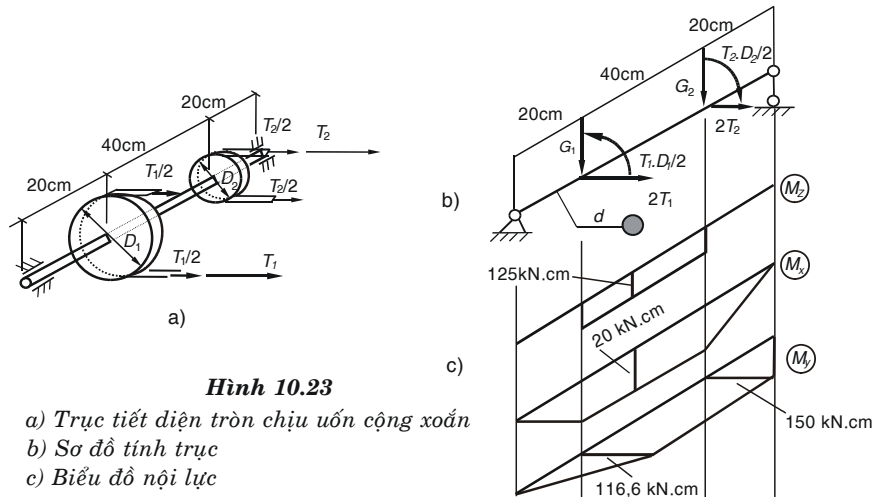
Mômen xoắn $M_z = 125 \text{ kNcm}$ gây ra ứng suất tiếp lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{125}{\pi \cdot D^3 / 16} = \frac{636,9}{D^3}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền thứ ba: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{1542,1^2}{(D^3)^2} + 4 \cdot \frac{636,9^2}{(D^3)^2}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2000}{D^3} \leq [\sigma] \Rightarrow D \geq 5,5 \text{ cm}$$

Có thể chọn đường kính trục là 55 mm.



10.5 THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

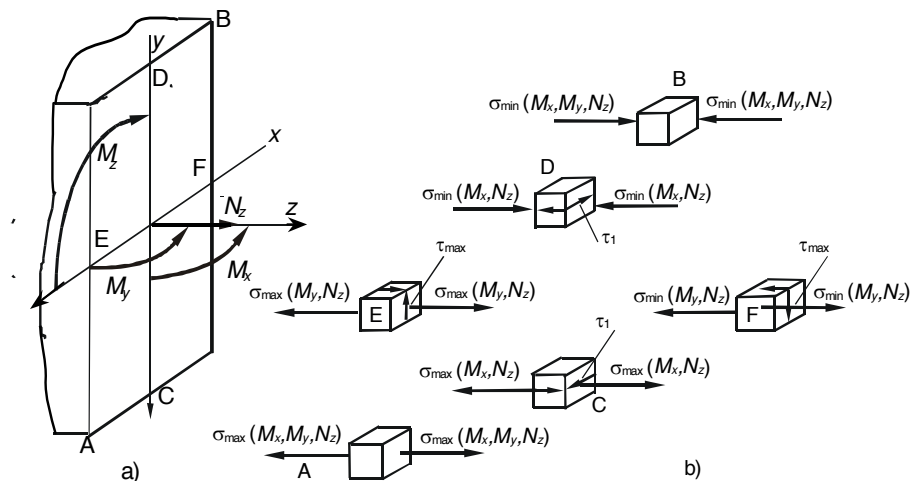
1. Định nghĩa

Thanh chịu lực tổng quát khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng của lực dọc N_z , mômen uốn M_u và mômen xoắn M_z .

Thanh chịu lực tổng quát thường gặp khi tính các thanh chịu lực theo sơ đồ không gian.

1- Thanh có tiết diện chữ nhật

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về kéo (nén), về uốn, và về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.24.a,b):



Tại các góc tiết diện, chỉ có ứng suất pháp do N_z , M_x , M_y , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.23)$$

Điều kiện bền: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$; $|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Tại điểm giữa cạnh dài, phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_y và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do M_z , đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (10.24)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (10.25)$

Tại điểm giữa cạnh ngắn, phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_x và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x}; \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (10.26)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

2- Thanh có tiết diện tròn (H.10.25.a,b)

Điểm nguy hiểm nằm trên chu vi, đó là hai điểm A,B. hai điểm này vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do mômen M_u và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

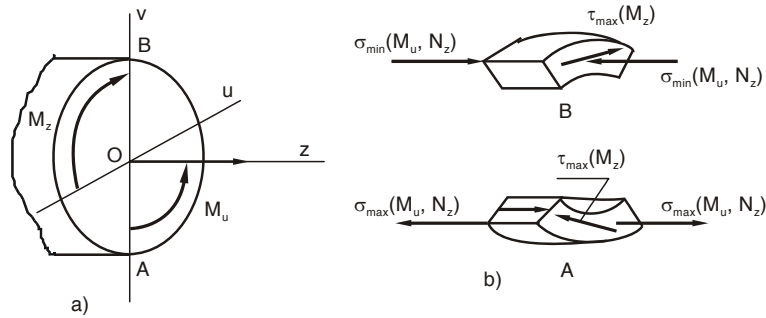
$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.27)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (10.28)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$



Hình 10.25

- a) Các thành phần nội lực
b) Trạng thái ứng suất của các phân tố

Ví dụ 10.7 Có một thanh tiết diện tròn đường kính D chịu một hệ lực không gian như trên H.10.26.a. Vẽ biểu đồ nội lực. xác định đường kính D .

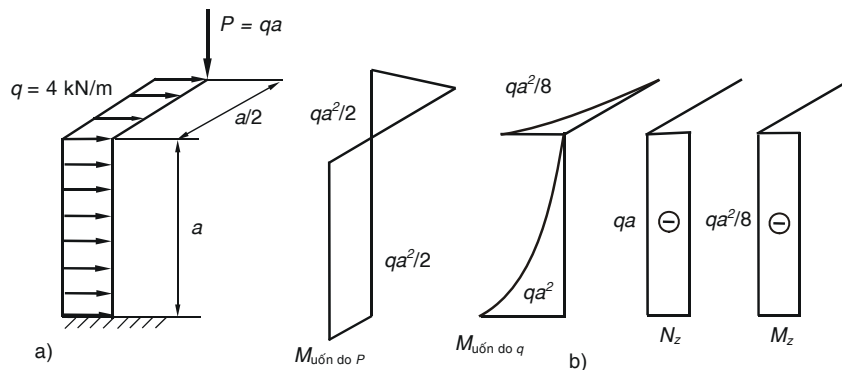
Cho: $q = 4 \text{ kN/m}$; $P = qa$; $a = 4 \text{ m}$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Biểu đồ nội lực được vẽ ở H.10.26.b.

Tại ngàm tiết diện chịu nội lực lớn nhất:

$$N_z = qa = 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN (nén)}; M_x = qa^2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100 = 6400 \text{ kN.cm}$$

$$M_y = qa^2/2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100/2 = 3200 \text{ kN.cm}; M_z = qa^2/8 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100/8 = 800 \text{ kN.cm}$$



Hình 10.26 a) Sơ đồ tính thanh chịu lực phức tạp

b) Biểu đồ nội lực vẽ theo nguyên lý cộng tác dụng

Ứng suất pháp lớn nhất:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_u|}{W_u}$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6400^2 + 3200^2} = 7155,41 \text{ kN.cm}$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{16}{\pi \cdot D^2 / 4} + \frac{7155,4}{\pi \cdot D^3 / 32}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{800}{\pi \cdot D^3 / 16}$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi D^2/4} + \frac{7155,4}{\pi D^3/32}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{800}{\pi D^3/16}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Trong tính toán thực hành, để thuận lợi cho việc giải bất phương trình trên, ban đầu chọn D theo uốn xoắn, bỏ qua ứng suất do lực dọc, sau đó kiểm tra lại, ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{7155,4}{\pi D^3/32}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{800}{\pi D^3/16}\right)^2} \leq [\sigma] \Rightarrow D \geq 16,6 \text{ cm}$$

Ban đầu, chọn: $D = 168 \text{ mm}$.

Kiểm tra điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

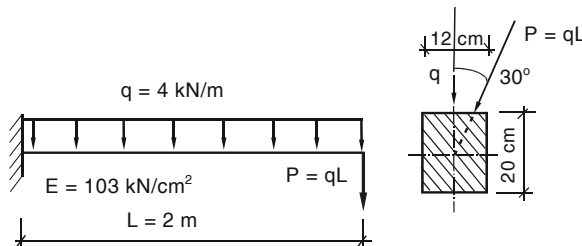
$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi \cdot 16,8^2/4} + \frac{7155,4}{\pi \cdot 16,8^3/32}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{800}{\pi \cdot 16,8^3/16}\right)^2} = \sqrt{(0,072 + 15,38)^2 + 4 \cdot (0,86)^2} = 15,54 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy chọn: $D = 168 \text{ mm}$.

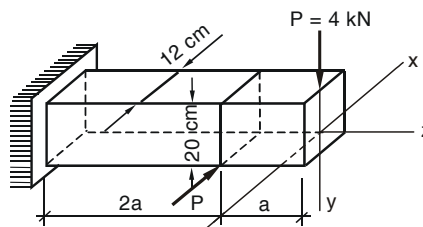
BÀI TẬP CHƯƠNG 10

10.1 Một thanh cong xon tiết diện chữ nhật chịu tác dụng của tải trọng như H.10.27. Vẽ biểu đồ nội lực, tính ứng suất pháp lớn nhất, xác định vị trí đường trung hoà tại mặt cắt ngầm.



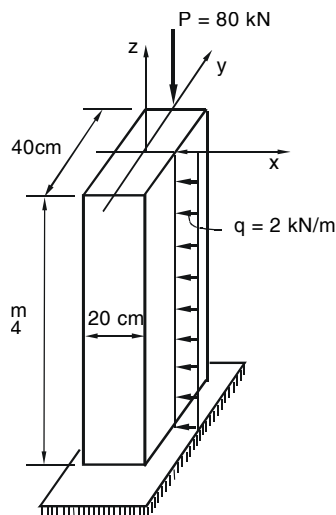
Hình 10.27

10.2 Xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất pháp, vị trí đường trung hoà tại mặt cắt nguy hiểm của dầm (H.10.28), $a = 1 \text{ m}$.



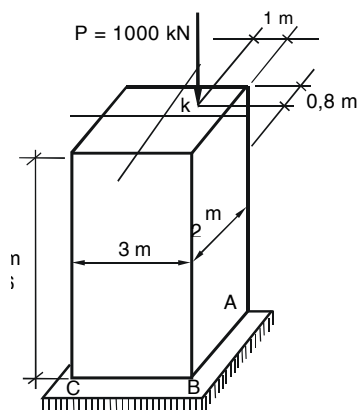
Hình 10.28

10.3 Xác định $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ và vị trí đường trung hoà tại mặt cắt nguy hiểm của cột H.10.29.



Hình 10.29

10.4 Một cột chịu tải trọng như H.10.30. Xác định ứng suất nén lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt chân cột. Cho trọng lượng riêng của vật liệu cột là: $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.

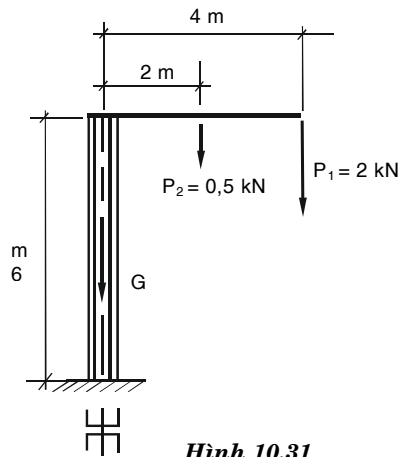


Hình 10.30

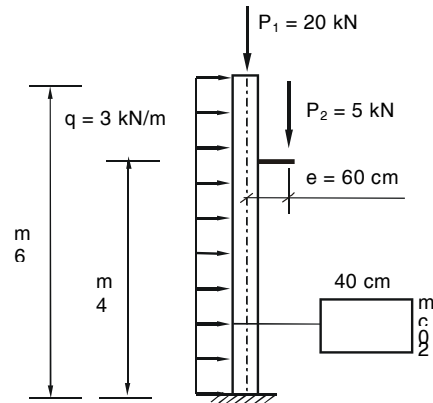
10.5 a. Một trụ đỡ có tiết diện gồm hai thép hình số hiệu [24 chịu tải trọng như H.10.31.

Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột.

b. Một cột chịu tải trọng như H.10.32. Tính ứng suất ứng suất kéo và nén lớn nhất.



Hình 10.31

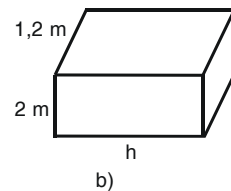
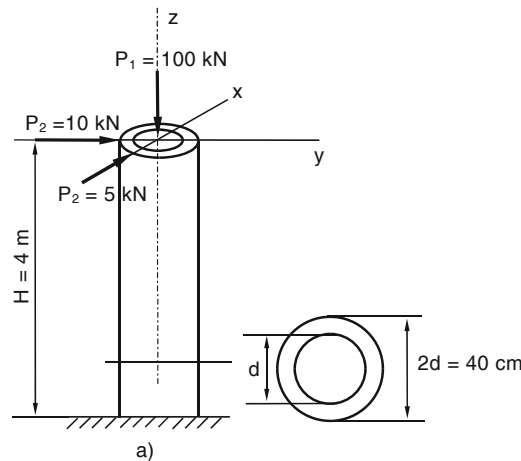


Hình 10.32

10.6 Một cột tròn rỗng chịu tác dụng của tải trọng như H.10.33.a.

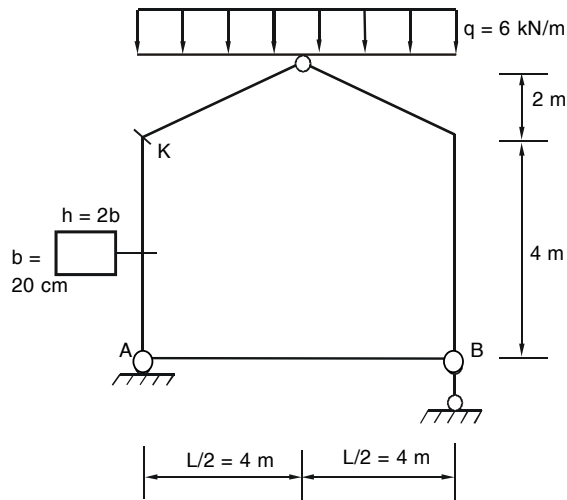
Tính ứng suất pháp $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ tại tiết diện chân cột, xác định vị trí và biểu diễn đường trung hoà tại tiết diện này.

Giả sử móng cột có kích thước $2 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} \times h$, trọng lượng riêng $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ (H.10.33.b) và trục cột được bố trí đi qua tâm móng. Hãy chỉ cách bố trí mặt bằng móng và tính kích thước h sao cho ở đáy móng không phát sinh ứng suất kéo.

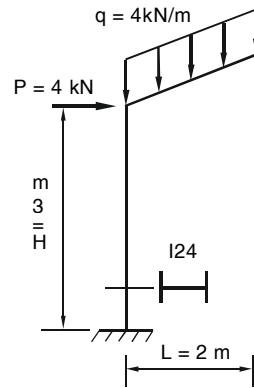


Hình 10.33

10.7 Một khung tiết diện chữ nhật đều, có thanh căng AB, chịu tác dụng của tải trọng như H.10.34. Vẽ biểu đồ nội lực của khung và nội lực kéo trong thanh AB. xác định ứng suất $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ và vị trí đường trung hoà tại mặt cắt ngang K.



Hình 10.34

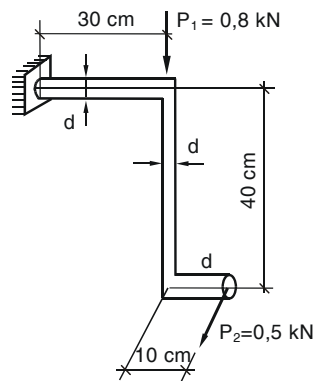


Hình 10.35

10.8 Một khung tiết diện chữ I24, chịu tác dụng của tải trọng như H.10.35. xác định nội lực tại tiết diện chân cột. Kiểm tra bền.

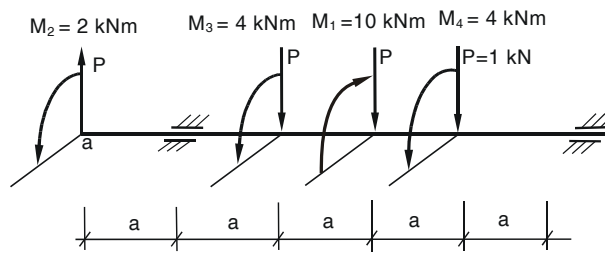
Cho $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

10.9 Một thanh gẫy khúc tiết diện tròn đường kính d chịu lực như H.10.36. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính d theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Cho $[\sigma] = 2,8 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 10.36

10.10 Một trục truyền động tiết diện tròn đường kính d có sơ đồ tính như H.10.37. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính d theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Cho $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.



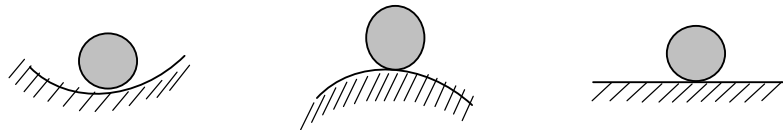
Hình 10.37

Chương 11

ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM**11.1 KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG**

Để đáp ứng yêu cầu chịu lực bình thường, một thanh phải thỏa mãn điều kiện bền và cứng, như đã được trình bày trong các chương trước đây. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, thanh còn phải thỏa mãn thêm điều kiện **ổn định**. Đó là khả năng duy trì hình thức biến dạng ban đầu nếu bị **nhieũ**. Trong thực tế, **nhieũ** có thể là các yếu tố sai lệch so với sơ đồ tính như độ cong ban đầu, sự nghiêng hoặc lệch tâm của lực tác dụng...

Khái niệm ổn định có thể minh họa bằng cách xét sự cân bằng của quả cầu trên các mặt lõm, lồi và phẳng trên H.11.1.



H.11.1 Sự cân bằng về vị trí của quả cầu

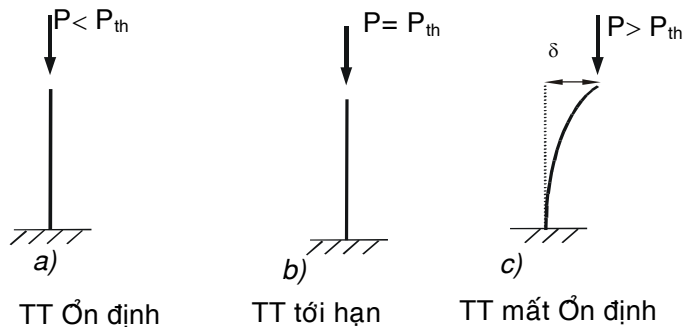
Nếu cho quả cầu một chuyển dịch nhỏ (gọi là **nhieũ**) từ vị trí ban đầu sang vị trí lân cận rồi bỏ **nhieũ** đi thì:

- Trên mặt lõm, quả cầu quay về vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **ổn định**.
- Trên mặt lồi, quả cầu chuyển động ra xa hơn vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **không ổn định**.
- Trên mặt phẳng, quả cầu giữ nguyên vị trí mới: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **phiếm định**.

Hiện tượng tương tự cũng có thể xảy ra đối với sự cân bằng về trạng thái biến dạng của hệ đàn hồi. Chẳng hạn với thanh chịu nén trên H.11.2. Trong điều kiện lý tưởng (thanh thẳng tuyệt đối, lực P hoàn toàn đúng tâm...) thì thanh sẽ giữ hình dạng thẳng, chỉ co ngắn do chịu nén đúng tâm. Nếu cho điểm đặt của lực P một chuyển vị bé δ do một lực ngang nào đó gây ra, sau đó bỏ lực này đi thì sẽ xảy ra các trường hợp biến dạng như sau:

+ Nếu lực P nhỏ hơn một giá trị P_{th} nào đó, gọi là **lực tới hạn**, tức là $P < P_{th}$, thì thanh sẽ phục hồi lại trạng thái biến dạng thẳng. Ta nói thanh làm việc ở **trạng thái ổn định**.

+ Nếu $P > P_{th}$ thì chuyển vị δ sẽ tăng và thanh bị cong thêm. Sự cân bằng của trạng thái thẳng ($\delta = 0$) là không ổn định. Ta nói thanh ở **trạng thái mất ổn định**. Trong thực tế thanh sẽ có chuyển vị δ và chuyển sang hình thức biến dạng mới bị uốn cong, khác trước về tính chất, bất lợi về điều kiện chịu lực.

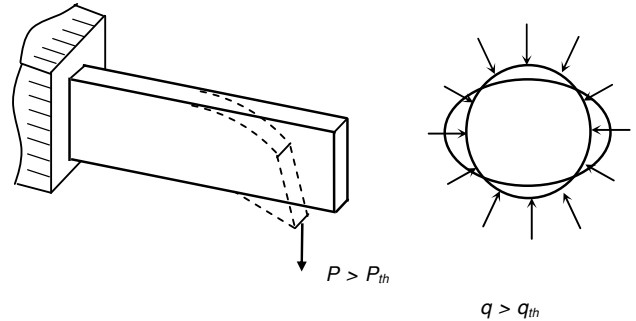


H. 11.2 Sự cân bằng của TT biến dạng

+ Ứng với $P = P_{th}$ thì thanh vẫn giữ nguyên chuyển vị δ và trạng thái biến dạng cong. Sự cân bằng của trạng thái thẳng là phiếm định. Ta nói thanh ở **trạng thái tới hạn**.

H.11.3 giới thiệu thêm vài kết cấu có thể bị mất ổn định như dầm chịu uốn, vành tròn chịu nén đều...

Khi xảy ra mất ổn định dù chỉ của một thanh cũng dẫn tới sự sụp đổ của toàn bộ kết cấu. Tính chất phá hoại do mất ổn định là đột ngột và nguy hiểm. Trong lịch sử ngành xây dựng đã từng xảy ra những thảm họa sập cầu chỉ vì sự mất ổn định của một thanh dầm chịu nén như cầu Mekhelstein ở Thụy Sĩ (1891), cầu Lavrentia ở Mỹ (1907)... Vì vậy khi thiết kế cần phải **đảm bảo cả điều kiện ổn định**, ngoài điều kiện bền và điều kiện cứng đã nêu trước đây.



H. 11.3 Các dạng mất ổn định

$$\text{Điều kiện ổn định: } P \leq [P]_{\text{ổđ}} = \frac{P_{th}}{k_{\text{ổđ}}} \quad (11.1)$$

$$\text{Hay: } N_z \leq [P]_{\text{ổđ}} = \frac{P_{th}}{k_{\text{ổđ}}} \quad (11.2)$$

$k_{\text{ổđ}}$: Hệ số an toàn về mặt ổn định, do quy định, và thường lớn hơn hệ số an toàn về độ bền n .

P (hay N_z) : Lực nén (nội lực nén) thanh.

11.2 KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH TRONG MIỀN ĐÀN HỒI

1- Tính lực tới hạn P_{th} thanh có kết khớp hai đầu (Bài toán Euler)

Xét thanh thẳng liên kết khớp hai đầu, chịu nén bởi lực tới hạn P_{th} . Khi bị nhiễu, thanh sẽ bị uốn cong và cân bằng ở hình dạng mới như trên H.11.4a.

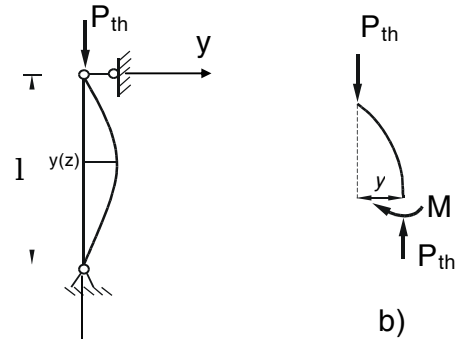
Đặt hệ trục tọa độ (x, y, z) như H.11.4a

Xét mặt cắt có hoành độ z ;

Độ võng ở mặt cắt này là y .

Ta có phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M}{EJ} \quad (a)$$



H. 11.4

Với: mômen uốn $M = P_{th} y$ (b) (từ điều kiện cân bằng trên H.11.4b)

$$(b) \text{ vào } (a) \Rightarrow y'' = -\frac{P_{th} y}{EJ} \text{ hay } y'' + \frac{P_{th}}{EJ} y = 0$$

$$\text{Đặt: } \alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ} \Rightarrow y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (c)$$

Nghiệm tổng quát của (c) là:

$$y = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z) \quad (d)$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện biên $y(0) = 0$ và $y(L) = 0$.

$$\text{Với: } y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\alpha L) = 0$$

để bài toán có nghĩa $y(z) \neq 0 \Rightarrow A \neq 0, \Rightarrow \sin(\alpha L) = 0$

phương trình này có nghiệm $\alpha L = n\pi$, với $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{L^2} \quad (e)$$

Thực tế, khi lực nén đạt đến giá trị tới hạn nhỏ nhất theo (e) ứng với $n = 1$ thì thanh đã bị cong. Vì vậy, các giá trị ứng với $n > 1$ không có ý nghĩa.

Ngoài ra, thanh sẽ cong trong mặt phẳng có **độ cứng uốn nhỏ nhất**. Do đó, công thức tính lực tới hạn của thanh thẳng hai đầu liên kết khớp là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2} \quad (11.3)$$

Đường đàn hồi tương ứng có dạng một nửa sóng hình sine:

$$y = A \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (11.4)$$

với: A là một hằng số bé, thể hiện độ võng giữa nhịp.

2- Tính P_{th} thanh có các liên kết khác ở đầu thanh

Áp dụng phương pháp trên cho thanh có các liên kết khác nhau ở hai đầu, ta được công thức tính lực tới hạn có dạng chung:

$$P_{th} = \frac{m^2 \pi^2 EJ_{\min}}{L^2} \quad (11.5)$$

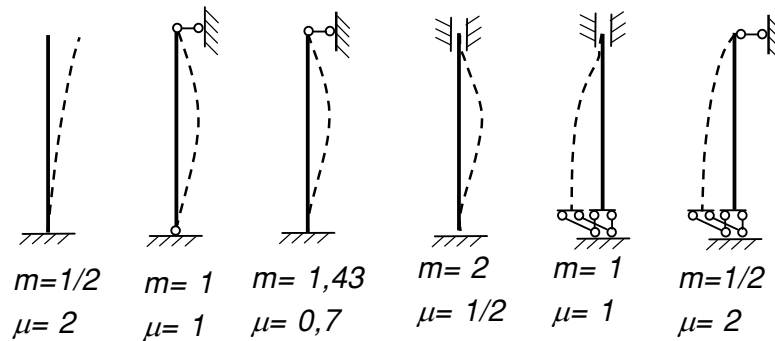
với: m - là số nửa sóng hình sine của đường đàn hồi khi mất ổn định.

Đặt $\mu = \frac{1}{m}$, gọi là hệ số quy đổi, (11.5) thành

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2} \quad (11.6)$$

(11.6) được gọi chung là **công thức Euler**

Dạng mất ổn định và hệ số μ của thanh có liên kết hai đầu khác nhau thể hiện trên H.11.5.



H. 11.5 Dạng mất ổn định và hệ số μ

3- Ứng suất tới hạn

Ứng suất trong thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th} gọi là ứng suất tới hạn và được xác định theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu L}{i_{\min}}\right)^2} \quad (11.7)$$

với: $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện.

$$\text{Đặt } \lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}} : \text{độ mảnh của thanh} \quad (11.8)$$

$$(11.7) \text{ thành: } \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11.9)$$

Độ mảnh λ không có thứ nguyên, phụ thuộc vào chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện; thanh có độ mảnh càng lớn thì càng dễ mất ổn định.

4- Giới hạn áp dụng công thức Euler

Công thức Euler được xây dựng trên cơ sở phương trình vi phân đường đàn hồi, vì vậy chỉ áp dụng được khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tức là ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

hay:
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (f)$$

Nếu đặt:
$$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (11.10)$$

thì điều kiện áp dụng của công thức Euler là:

$$\lambda \geq \lambda_o \quad (11.11)$$

trong đó: λ_o - được gọi là **độ mảnh giới hạn** và là một hằng số đối với mỗi loại vật liệu.

Thí dụ: Thép xây dựng thông thường $\lambda_o = 100$, gỗ $\lambda_o = 75$; gang $\lambda_o = 80$.

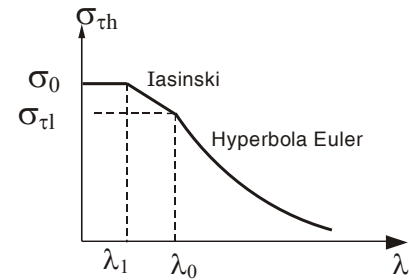
Nếu $\lambda \geq \lambda_o$ thì gọi là **độ mảnh lớn**.

Như vậy, công thức Euler chỉ áp dụng được cho thanh có độ mảnh lớn.

11.3 ỔN ĐỊNH NGOÀI MIỀN ĐÀN HỒI

1- Ý nghĩa

Công thức Euler chỉ áp dụng được khi vật liệu đàn hồi. Đồ thị của phương trình (11.6) là một *hyperbola* như trên H.11.6, chỉ đúng khi $\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$.



H. 11.6 Ứng suất tới hạn

Khi $\sigma_{th} > \sigma_{tl} \Leftrightarrow$ vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi, cần thiết phải có công thức khác để tính P_{th} .

2- Công thức thực nghiệm lasinski

Công thức lasinski được đề xuất dựa trên nhiều số liệu thực nghiệm, phụ thuộc vào độ mảnh của thanh.

- **Thanh có độ mảnh vừa** $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_0$:

$$\sigma_{th} = a - \lambda b \quad (11.12)$$

với: a và b là các hằng số phụ thuộc vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm: • Thép xây dựng: $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$; $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$

• Gõ: $a = 2,93 \text{ kN/cm}^2$; $b = 0,0194 \text{ kN/cm}^2$

độ mảnh λ_1 được xác định từ công thức:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} \quad (11.13)$$

thực nghiệm cho thấy phạm vi giá trị $\lambda_1 = 30 \div 40$

- **Thanh có độ mảnh bé** $\lambda < \lambda_1$: Khi này thanh không mất ổn định mà đạt đến trạng thái phá hoại của vật liệu. Vì vậy, ta coi:

$$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_b \quad \text{đối với vật liệu dòn}$$

$$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_{ch} \quad \text{đối với vật liệu dẻo} \quad (11.14)$$

$$\text{và Lực tới hạn của thanh : } P_{th} = \sigma_{th} \cdot F \quad (11.15)$$

Thí dụ 11.1 Tính P_{th} và σ_{th} của một cột làm bằng thép số 3 có mặt cắt ngang hình chữ I số 22. Cột có liên kết khớp hai đầu. Xét hai trường hợp:

- Chiều cao của cột 3,0 m
- Chiều cao của cột 2,25 m

Biết: $E = 2,1.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$; $\lambda_o = 100$

Các hằng số trong công thức lasinski : $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$, $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$

Giải.

Tra bảng thép định hình (phụ lục) ta có các số liệu của thép I N°22:

$i_{\min} = i_y = 2,27 \text{ cm}$; $F = 30,6 \text{ cm}^2$; theo liên kết của thanh thì ta có $\mu = 1$.

+ Trường hợp a)

$$\text{Độ mảnh : } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.300}{2,27} = 132 > \lambda_o = 100$$

Thanh có độ mảnh lớn, áp dụng công thức Euler

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1.10^4}{132^2} = 11,88 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Rightarrow P_{th} = \sigma_{th} F = 11,88.30,6 = 363,62 \text{ kN}.$$

+ Trường hợp b)

$$\text{Độ mảnh : } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.225}{2,27} = 99,11 < \lambda_o$$

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} = \frac{33,6 - 21}{0,147} = 85,7 \rightarrow \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$$

Thanh có độ mảnh vừa, dùng công thức lasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 33,6 - 0,147.90 = 20,37 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 20,37.30,6 = 623,32 \text{ kN}.$$

Chú ý: - Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính giống nhau trong các công thức đã có sẽ dụng $J_{\min}$ và $i_{\min}$.

- Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính khác nhau thì khi mất ổn định thanh sẽ cong trong mặt phẳng có độ mảnh lớn và các đại lượng J , i sẽ lấy trong mặt phẳng này.

11.4 PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN

1- Phương pháp tính: Thanh chịu nén cần phải thỏa :

♦ Điều kiện bền: $\sigma = \frac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]_n$; với: $[\sigma]_n = \frac{\sigma_o}{n}$ (11.16)

trong đó: n - hệ số an toàn về độ bền

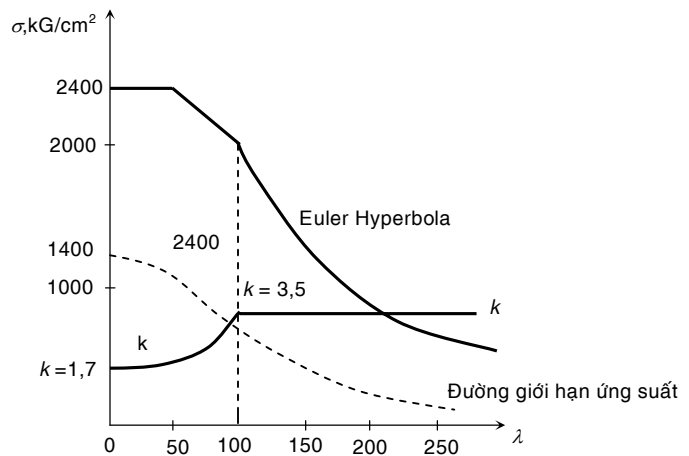
F_{th} - diện tích tiết diện giảm yếu (bị khoét lỗ); nếu không khoét lỗ thì $F_{th} = F$ là tiết diện nguyên

♦ Điều kiện ổn định: $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{ổđ}}$; với: $[\sigma]_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{k_{\text{ổđ}}}$ (11.17)

trong đó: $k_{\text{ổđ}}$ (hay k)- hệ số an toàn về ổn định.

Vì sự giảm yếu cục bộ tại một số tiết diện có ảnh hưởng không đáng kể đến sự ổn định chung của thanh.

Do tính chất nguy hiểm của hiện tượng mất ổn định và xét đến những yếu tố không tránh được như độ cong ban đầu, độ lệch tâm của lực nén ... nên chọn $k_{\text{ổđ}} > n$, và k thay đổi phụ thuộc vào độ mảnh. Thép xây dựng có $k_{\text{ổđ}} = 1,8 \div 3,5$ như minh họa trên H.11.7; gang $k_{\text{ổđ}} = 5 \div 5,5$; gỗ $k_{\text{ổđ}} = 2,8 \div 3,2$.



Hình.11.7 Hệ số an toàn $k_{\text{ổđ}}$ cho thép

Để thuận tiện cho tính toán thực hành, người ta đưa vào

khái niệm **hệ số uốn dọc** hoặc **hệ số giảm ứng suất cho phép** φ được định nghĩa như sau:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\text{ổđ}}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} \frac{n}{k}$$

$\varphi < 1$, vì cả hai tỉ số: $\frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} < 1$ và $\frac{n}{k} < 1$

từ đó: $[\sigma]_{\text{ổđ}} = \varphi[\sigma]$, và điều kiện ổn định trở thành: $\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n$ (11.18)

hay: $\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_n$;

hay: $P \leq [P]_{\text{ổđ}} = \varphi[\sigma]_n F$ (11.19)

Điều kiện ổn định (11.18) thỏa, điều kiện bền (11.16) không cần kiểm tra

Hệ số $\varphi = \varphi_{[E, \lambda, k]}$ được cho ở bảng 11.1

Bảng 11.1 Hệ số φ

Độ mảnh λ	Trị số φ đối với				
	Thép số 2,3,4	Thép số 5	Thép CΠK	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,54	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35		0,25
120	0,45	0,36	0,30		0,22
130	0,40	0,33	0,26		0,18
140	0,36	0,29	0,23		0,16
150	0,32	0,26	0,21		0,14
160	0,29	0,24	0,19		0,12
170	0,26	0,21	0,171		0,11
180	0,23	0,19	0,15		0,10
190	0,21	0,17	0,14		0,09
200	0,19	0,16	0,13		0,08

Vì $\varphi < 1$ nên thường chỉ cần kiểm tra điều kiện ổn định là đủ. Tuy nhiên, nếu thanh có giảm yếu cục bộ do liên kết bu lông, đinh tán... thì cần kiểm tra cả hai điều kiện bền và ổn định.

$$\text{- Điều kiện bền: } \sigma = \frac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]_n \quad (11.20)$$

$$\text{- Điều kiện ổn định } \sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma]_n \quad (11.21)$$

trong thực tế, nếu thỏa (11.21) thì thường cũng thỏa (11.20).

Đối với bài toán ổn định cũng có ba bài toán:

1. Kiểm tra ổn định:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma]_n \quad (11.22)$$

2. Xác định tải trọng cho phép:

$$[P] \leq \varphi F [\sigma]_n \quad (11.23)$$

Trong hai bài toán trên, vì tiết diện thanh đã biết nên có thể suy ra hệ số φ theo trình tự: $F, l \rightarrow \lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{J/F}} \rightarrow \varphi$ (tra bảng 11.1)

3. Chọn tiết diện:

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]_n} \quad (11.24)$$

việc tìm F phải làm đúng dần, vì trong (11.22) chứa hai biến: F và $\varphi(F)$. Trình tự như sau:

$$\text{- Giả thiết: } \varphi_o = 0,5; \text{ tính được: } F_o = \frac{P}{\varphi_o [\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_o$$

$$\text{- Từ } \lambda_o \text{ tra bảng ta được } \varphi_o'. \text{ Nếu } \varphi_o' \neq \varphi_o \text{ thì lấy: } \varphi_1 = \frac{\varphi_o + \varphi_o'}{2}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow \varphi_1'$$

thường lặp lại quá trình tính khoảng 2 - 3 lần thì sai số tương đối giữa hai lần tính đủ nhỏ ($\leq 5\%$).

Thí dụ 11.3 Chọn số liệu thép I cho thanh dài 2,0m, liên kết khớp hai đầu và chịu lực nén $P = 230 \text{ kN}$. Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma]_n = 14 \text{ kN/cm}^2$.

Giải:

a. Lần chọn thứ nhất

$$\text{Giả thiết } \varphi = 0,5, \Rightarrow F \geq \frac{P}{[\sigma]_n \varphi} = \frac{230}{14 \cdot 0,5} = 32,8 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ta chọn thép chữ I số 24 có $F = 34,8 \text{ cm}^2$, $i_y = i_{\min} = 2,37 \text{ cm}$, ta có độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,37} = 84,4$$

Tra bảng quan hệ giữa λ và φ ta được $\varphi = 0,724$. Hệ số này khác với giả thiết ban đầu nên ta phải chọn lại.

b. Lần chọn thứ hai

$$\text{Giả thiết: } \varphi = \frac{0,5 + 0,724}{2} = 0,612 \Rightarrow F \geq \frac{230}{0,612 \cdot 14} = 26,84 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ta tìm được thép chữ I số 20 với $F = 26,8 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 2,07 \text{ cm}$. Độ mảnh lúc đó bằng:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 200}{2,07} = 96,6$$

tra bảng ta tìm được $\varphi = 0,631$ gần đúng giá trị 0,625 theo giả thiết. Do đó, ta kiểm tra lại điều kiện ổn định:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_n ; \quad \frac{230}{0,631 \cdot 26,8} = 13,6 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy ta chọn thép chữ I số 20.

2- Chọn mặt cắt ngang và vật liệu hợp lý

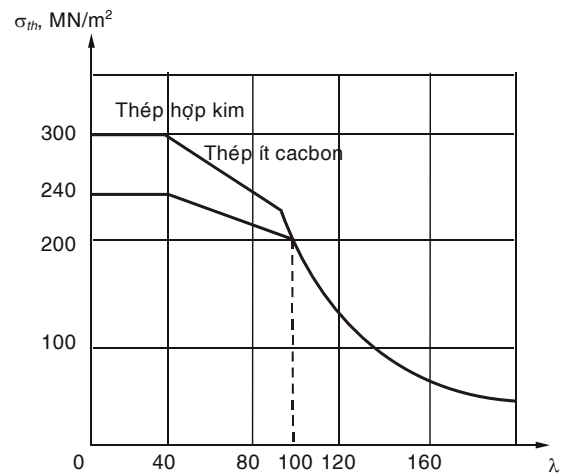
Khi thiết kế thanh chịu nén, người ta cố gắng làm cho khả năng chịu lực của thanh càng lớn càng tốt. Theo công thức (11.6) và (11.15) ta có lực tới hạn:

$$\text{- Trong miền đàn hồi: } P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (11.6)$$

$$\text{- Ngoài miền đàn hồi: } P_{th} = \sigma_{th} \cdot F \quad (11.15)$$

Thường thì chiều dài và liên kết hai đầu thanh được cho trước. Vì vậy, để tăng P_{th} có hai cách:

1) Chọn vật liệu có môđun đàn hồi lớn, Ví dụ dùng thép thay cho bê tông. Tuy nhiên, chỉ dùng thép cường độ cao thay cho thép cường độ thấp khi thanh làm việc ngoài miền đàn hồi; còn trong miền đàn hồi thép có môđun đàn hồi giống nhau nên việc thay thế không có lợi về mặt chịu lực như đồ thị trên H.11.8 thể hiện.



2) Nếu hệ số liên kết μ giống nhau theo hai phương thì cấu tạo tiết diện có $I_x = I_y$, và thường làm tiết diện rỗng để tăng mômen quán tính của mặt cắt nhưng phải có cấu tạo để không mất ổn định cục bộ. Tiết diện hợp lý của cột chịu nén trong thực tế thường có dạng như trên H.11.9



Hình 11.9 Dạng tiết diện hợp lý

Nếu liên kết hai phương khác nhau thì nên cấu tạo tiết diện sao cho có

$$\text{hay: } \lambda_{\max} = \lambda_{\min} \quad \frac{J_x}{\mu_x^2} = \frac{J_y}{\mu_y^2} \quad (11.25)$$

11.5 XÁC ĐỊNH LỰC TỐI HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

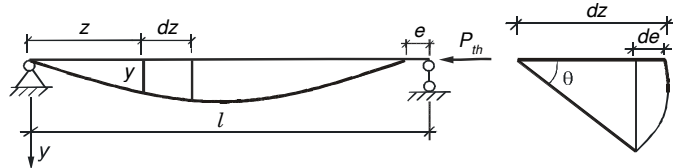
1- Khái niệm

Việc tìm lực tối hạn của thanh có độ mảnh lớn theo phương pháp tĩnh do Euler thực hiện là chính xác. Tuy nhiên, trong thực tế có những bài toán phức tạp hơn như thanh có độ cứng EJ thay đổi, lực phân bố dọc theo trục thanh... thì việc thiết lập và giải phương trình vi phân để tìm lực tối hạn trở nên phức tạp.

Trong trường hợp đó, người ta có thể dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng để tìm nghiệm gần đúng.

2- Phương pháp năng lượng xác định lực tối hạn

Giả sử thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th} , như được minh họa trên H.11.10.



Hình 11.10 Xác định lực tối hạn

Dưới tác động của nhiều, thanh bị uốn cong với phương trình $y(z)$, điểm đặt của lực P_{th} dịch chuyển một đoạn e . Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, công A của lực P_{th} bằng thế năng biến dạng uốn U của thanh:

$$A = U \quad (11.26)$$

trong đó: $A = P_{th}e \quad (11.27)$

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dz = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y'^2 dz \quad (11.28)$$

Để xác định độ co ngắn e của thanh do sự uốn cong gây ra, ta xét phân tố thanh dz trên H.11.11. Ta có:

$$de = dz - dz \cos \theta = dz(1 - \cos \theta) = dz(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) = dz 2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{\theta^2}{2} dz$$

hay: $de = \frac{y'^2}{2} dz \quad (11.29)$

Chú ý rằng, vì góc xoay θ là bé nên ở trên ta đã coi:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}; \quad \theta = \tan \theta = y'$$

Tích phân (11.30) ta được:

$$e = \int_0^l \frac{y'^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dz \quad (11.30)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz \quad (11.31)$$

Thế (11.31) và (11.28) vào (11.26) ta có:

$$\frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dz$$

hay:
$$P_{th} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz} \quad (11.32)$$

Khi tìm lực P_{th} theo phương pháp năng lượng, ta chọn $y(z)$ thỏa điều kiện biên và thế vào (11.33). Vì thường $y(z)$ là gần đúng nên lực P_{th} cũng gần đúng. Sự sai lệch của đường đàn hồi $y(z)$ có ý nghĩa như là thanh được đặt thêm một hệ liên kết đàn hồi nào đó phân bố dọc theo trục thanh và làm cho thanh trở nên cứng hơn. Vì vậy, lực P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng luôn lớn hơn giá trị thật (chỉ bằng giá trị thật khi đường đàn hồi được chọn chính xác).

Thí dụ 11.4 Tìm lực P_{th} cho thanh trên H.11.11 với $EJ = \text{hằng số}$

Giải.

Giả sử đường đàn hồi được chọn gần đúng theo dạng do lực phân bố đều gây ra như sau:

$$y = \alpha z(z^3 - 2lz^2 + l^3)$$

với α - là một hằng số bé.

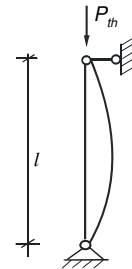
ta có: $y' = \alpha(4z^3 - 6lz^2 + l^3)$

$$y'' = 12\alpha(z^2 - lz)$$

thế vào (11.33) ta tìm được: $P_{th} = \frac{9,882EI}{l^2}$

So với nghiệm chính xác $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,8696EI}{l^2}$ thì kết quả tính lớn hơn 0,25%.

Nếu đường đàn hồi chọn là một nửa sóng hình *sine*, tức là trùng với đường đàn hồi chính xác của bài toán Euler, thì P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng cũng cho kết quả chính xác.



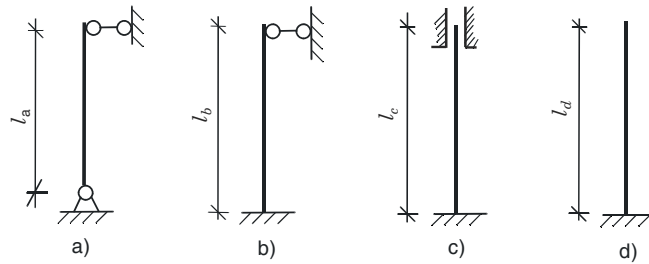
Hình 11.11

Tìm P_{th} bằng
phương pháp năng lượng

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

11.1 Cho bốn thanh có mặt cắt ngang như nhau làm bằng cùng một loại vật liệu và có liên kết như trên H.11.1.

Nếu muốn chịu được cùng một lực nén đúng tâm thì chiều dài của mỗi thanh phải bằng bao nhiêu L_a . Giả thiết vật liệu mất ổn định trong miền đàn hồi và $EJ = \text{hằng số}$.



Hình 11.1

11.2 Thanh có chiều dài $L = 3 \text{ m}$, một đầu ngàm, một đầu khớp. Hãy xác định lực tối hạn của thanh trong ba trường hợp sau đây:

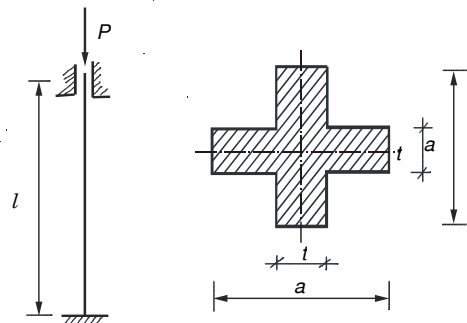
a. Mặt cắt hình tròn bán kính $R = 4 \text{ cm}$, vật liệu là gang xám có: $\sigma_{Hl} = 17,8 \text{ kN/cm}^2$; $E = 1,15 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

b. Mặt cắt hình tròn rỗng bán kính ngoài $R = 3 \text{ cm}$ và bán kính trong $r = 2 \text{ cm}$, vật liệu là dural có $\sigma_{Hl} = 18 \text{ kN/cm}^2$; $E = 0,71 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

c. Mặt cắt hình vuông cạnh $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$, vật liệu bằng gỗ có: $\sigma_{Hl} = 1,7 \text{ kN/cm}^2$; $E = 0,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Biết hai hệ số trong công thức lasinski là $a = 2,93 \text{ kN/cm}^2$ và $b = 0,0194 \text{ kN/cm}^2$

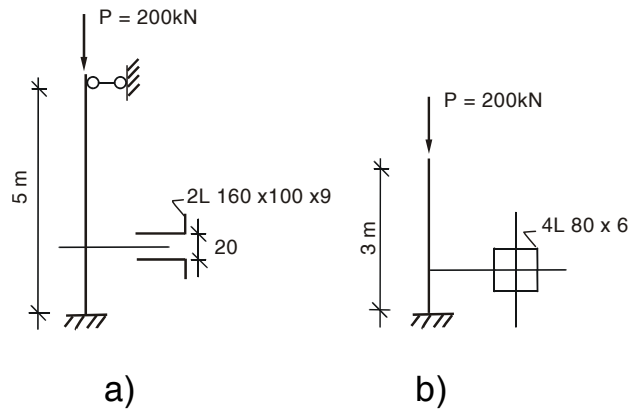
11.3 Cho thanh bằng gang có $l = 1,6 \text{ m}$;

$a = 6 \text{ cm}$; $t = 1 \text{ cm}$ như H.11.14. Xác định lực tối hạn và ứng suất tối hạn. Cho $\lambda_o = 80$; $a = 77,6 \text{ kN/cm}^2$; $b = 1,2 \text{ kN/cm}^2$. Muốn thanh mất ổn định khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi thì chiều dài của thanh phải bao nhiêu?



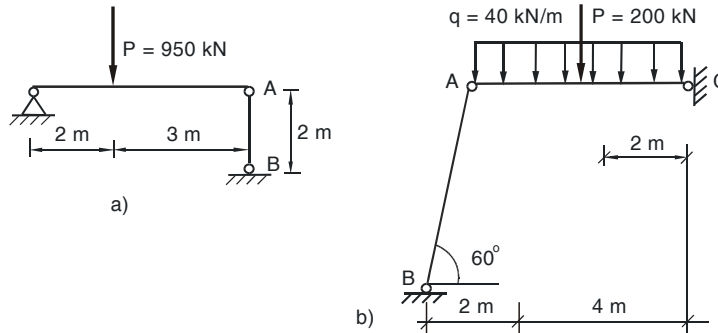
Hình 11.3

11.4 Kiểm tra ổn định của các thanh cho trên H.11.4, nếu $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$. Lực nén cho phép lớn nhất là bao nhiêu? Vật liệu của thanh thép là thép số 3.



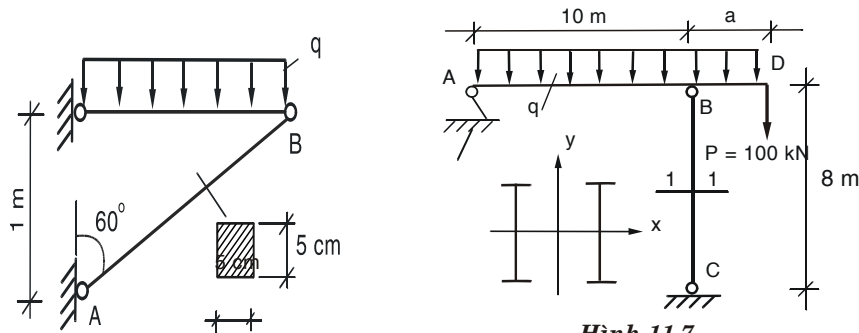
Hình 11.4

11.5 Cho hai hệ thanh chịu lực như trên H.11.5. Xác định số hiệu mặt cắt chữ I của thanh chống AB, biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Vật liệu là thép số 3. Xác định hệ số an toàn về ổn định của các thanh đó.



Hình 11.5

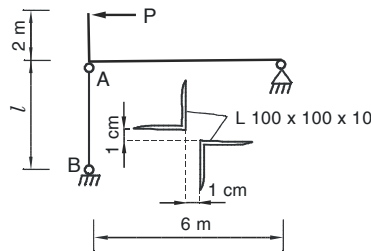
11.6 Một giá đỡ chịu tải trọng phân bố đều như trên H.11.6. Xác định trị số cho phép của cường độ tải trọng phân bố tác dụng lên giá. Thanh AB có mặt cắt hình vuông cạnh 5 cm x 5 cm làm bằng gỗ có $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.



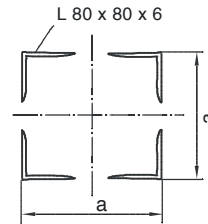
Hình 11.7

Hình 11.6

11.7 Một dầm cầu trục AD chịu lực như H.11.7. Cột BC làm bằng hai thép chữ I số 14 ghép lại sao cho mô men quán tính đối với hai trục bằng nhau. Xác định chiều dài tối đa của mút thừa a , biết rằng cột làm việc bất lợi nhất khi xe cầu trục mang một trọng lượng 100 kN đặt ở đầu mút thừa. Tải trọng phân bố $q = 4 \text{ kN/m}$.



Hình 11.8

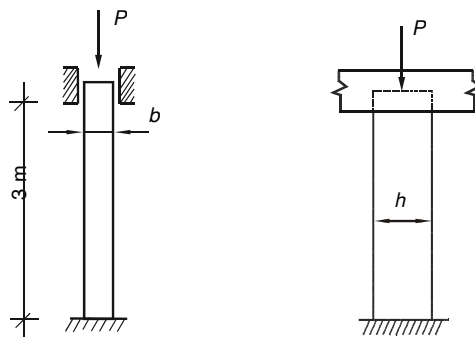


Hình 11.9

11.8 Hệ thanh chịu lực như H.11.8. Xác định chiều dài l của thanh chống AB làm bằng thép có $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$. Cho biết tải trọng $P = 300 \text{ kN}$.

11.9 Một thanh chịu nén đúng tâm được làm bằng bốn thép góc đều cạnh loại $80 \times 80 \times 6$ (H.11.9). Xác định kích thước a của mặt cắt. Biết thanh dài $l = 6 \text{ m}$ hai đầu liên kết khớp và chịu lực nén ở đầu cột $P = 200 \text{ kN}$. Vật liệu có $[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2$.

11.10 Một cột gỗ dài $L = 3 \text{ m}$, mặt cắt hình chữ nhật $b \times h$. Đầu dưới của cột được chôn vào nền bê tông, đầu trên có thể trượt theo một khe nhỏ song song với phương chiều dài h của mặt cắt (H.11.10). Xác định kích thước của mặt cắt $b \times h$ sao cho mặt cắt là hợp lý nhất. Cho biết lực nén $P = 100 \text{ N}$, $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.



UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

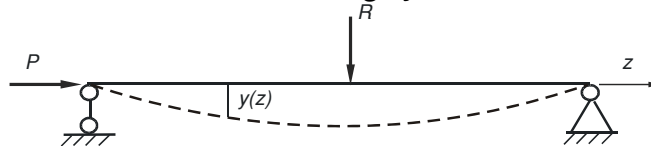
12.1 ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN

Xét một thanh chịu uốn bởi tác động đồng thời của lực ngang R và lực nén dọc P như trên H.12.1. Nếu chuyển vị là đáng kể thì cần phải xét cân bằng của thanh trên sơ đồ biến dạng và mômen nội lực sẽ bao gồm ảnh hưởng của lực R và P :

$$M(z) = M_R + M_P = M_R + Py(z) \quad (12.1)$$

trong đó: M_R - mômen uốn do riêng tải trọng ngang gây ra

$Py(z)$ - mômen uốn do lực dọc gây ra.



Hình 12.1 Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

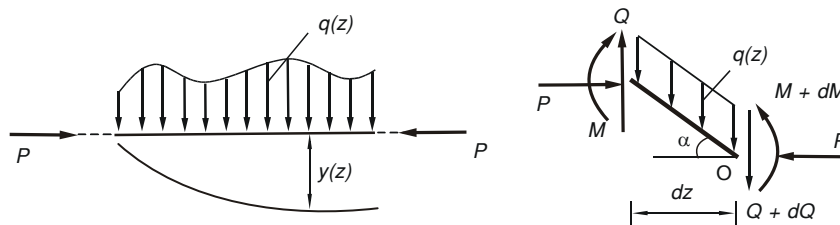
Bài toán như vậy được gọi là uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

Đặc điểm của bài toán:

- Mômen $M(z)$ phụ thuộc vào độ võng $y(z)$
- Mômen $M(z)$ phụ thuộc phi tuyến vào lực P vì độ võng $y(z)$ cũng phụ thuộc vào P . Vì vậy, nguyên lý cộng tác dụng không áp dụng được cho loại bài toán này.

12.2 PHƯƠNG PHÁP CHÍNH XÁC

Để tìm được mômen uốn, trước hết cần thiết lập phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu lực nén P và tải trọng ngang.



Hình 12.2 Thanh chịu uốn nén

Xét cân bằng trên sơ đồ biến dạng của phân tố thanh dz như trên H.12.2

$$\sum M_o = 0 : M + dM - M - Qdz - Pdz \operatorname{tg} \alpha = 0$$

chú ý rằng : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dz}$

ta có: $\frac{dM}{dz} - P \frac{dy}{dz} = Q$ (12.2)

lấy đạo hàm hai vế của (12.2), chú ý rằng $\frac{dQ}{dz} = -q(z)$, ta có phương trình:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} - P \frac{d^2 y}{dz^2} = -q(z) \quad (12.3)$$

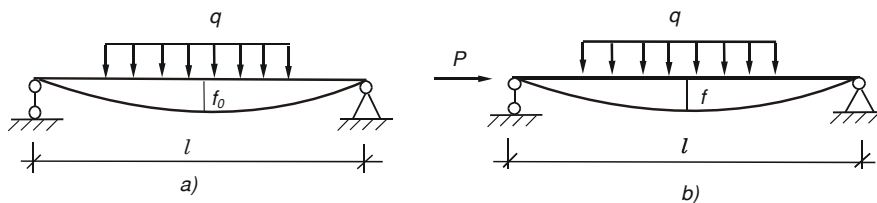
thế $M = -EIy''$ (*) vào (12.3) ta thu được:

$$EIy^{IV} + Py'' = q(z) \quad (12.4)$$

Đây là phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu nén uốn. Nếu biết tải trọng tác dụng và các điều kiện biên thì có thể giải (12.4) để tìm đường đàn hồi, từ đó suy ra mômen uốn theo phương trình (*). Trong thực tế, thường có nhiều quy luật tải trọng khác nhau trên chiều dài thanh nên việc giải phương trình (12.4) rất phức tạp. Vì vậy, người ta thường áp dụng phương pháp gần đúng dưới đây.

12.3 PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG

Xét dầm đơn giản chịu tải trọng đối xứng như H.12.3.



Hình 12.3 Đường đàn hồi đối xứng

Sơ đồ (a) chỉ chịu tải trọng ngang, với độ võng giữa nhịp f_0 .

Sơ đồ (b) chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc, có độ võng giữa nhịp f.

Giả thiết đường đàn hồi có dạng hình *sine* (giống dạng mất ổn định), ta có phương trình đường đàn hồi trong hai trường hợp như sau:

$$y_0 = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y = f \sin \frac{\pi z}{l}$$

Dạng phương trình này thỏa điều kiện biên $y = y'' = 0$ tại hai khớp. Mômen uốn nội lực tương ứng như sau:

$$M_o = -EIy''_0 = EI \frac{\pi^2}{l^2} f_0 \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_0$$

$$M = -EIy'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y$$

Thế các kết quả này vào phương trình (12.1) ta có:

$$EI \frac{\pi^2}{l^2} y = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_o + Py \quad (12.5)$$

từ đó suy ra:
$$y(z) = \frac{y_o(z)}{1 - P / \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

hay:
$$y(z) = \frac{y_o(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.6)$$

với: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ là lực tới hạn của thanh khi mất ổn định trong mặt phẳng uốn.

đạo hàm hai vế của (12.6) và nhân với $-EI$ ta có:

$$-EIy''(z) = \frac{-EIy_o''(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

hay:
$$M(z) = \frac{M_o}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.7)$$

Chú ý: - Nếu tải không đối xứng nhưng cùng hướng về một phía thì các công thức trên kém chính xác hơn nhưng vẫn dùng được.

- Nếu thanh có liên kết hai đầu khác thì vẫn dùng được các công thức (12.6), (12.7) nhưng cần xét tới hệ số liên kết μ trong công thức P_{th} :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (12.8)$$

12.4 ỨNG SUẤT VÀ KIỂM TRA BỀN

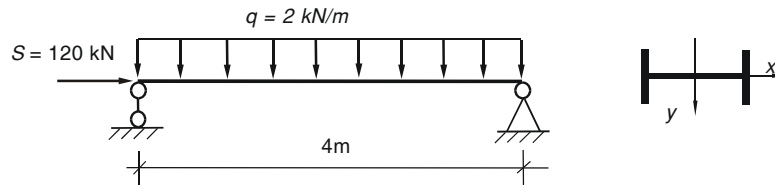
Ứng suất lớn nhất được tính theo công thức:

$$\max \sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} + \frac{M_o}{W(1 - \frac{P}{P_{th}})} \quad (12.9)$$

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số n dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như sau:

$$\frac{nP}{A} + \frac{nM_o}{W(1 - \frac{nP}{P_{th}})} \leq \sigma_o \quad (12.10)$$

Ví dụ 12.1 Tìm mômen uốn và độ võng lớn nhất của dầm thép chữ IN^o36 chịu lực như trên H.12.4.



Hình 12.4

Giải. Sử dụng bảng tra thép định hình, tương ứng với số hiệu **IN^o36** và các ký hiệu trên hình trên, ta có:

$$A = 61,9 \text{ cm}^2; I_x = 516 \text{ cm}^4; I_y = 13380 \text{ cm}^4; E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số lớn nhất của mômen uốn, độ võng do tải trọng ngang gây ra tại giữa nhịp:

$$M_o = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ kNm}$$

$$y_o = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 400^4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 516} = 0,615 \text{ cm}$$

Trị số lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 516}{(1 \cdot 400)^2} = 668 \text{ kN}$$

Độ võng của dầm, theo công thức gần đúng:

$$y = \frac{y_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{0,615}{1 - \frac{120}{668}} = 0,75 \text{ cm}, \text{ tăng } 22\% \text{ so với } y_o$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ nhất:

$$M = M_o + Sy = 4 + 120 \cdot 0,075 = 4,9 \text{ kNm}$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ hai:

$$M = \frac{M_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{4}{1 - \frac{120}{668}} = 4,87 \text{ kNm} \text{ sai số } 0,5\% \text{ so với công thức gần đúng thứ}$$

nhất.

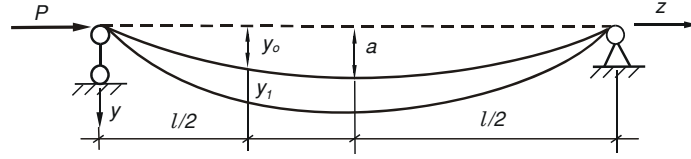
Giá trị mômen trong trường hợp uốn ngang và dọc tăng 22,5% so với mômen chỉ do lực ngang gây ra, tức là thiên về an toàn hơn.

12.5 THANH CÓ ĐỘ CONG BAN ĐẦU

1- Ảnh hưởng của độ cong ban đầu

Xét thanh có độ cong ban đầu, chịu lực nén P như trên H.12.5. Giả sử đường cong ban đầu có dạng:

$$y_o = a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.11)$$

**Hình 12.5** Thanh có độ cong ban đầu

Do tác dụng của lực P , thanh bị võng thêm có phương trình $y_1(z)$. Độ võng toàn phần: $y = y_o + y_1$

(12.12)

Mômen uốn do lực P gây ra:

$$M = Py = P(y_o + y_1) \quad (12.13)$$

Phương trình vi phân độ võng thêm:

$$EIy_1'' = -M = -P(y_o + y_1) \quad (12.14)$$

thế (12.11) vào (12.14) và đặt: $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta có:

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = -\alpha^2 a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.15)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$y_1 = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.16)$$

Các điều kiện biên: $y_1(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
 $y_1(l) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\text{Do đó: } y_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{P} l^2 - 1} a \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$\text{hay: } y_1 = \frac{k}{1-k} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.17)$$

$$\text{với: } k = \frac{P}{P_{th}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (12.18)$$

$$\text{Độ võng toàn phần: } y = y_o + y_1 = (a + \frac{k}{1-k} a) \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{a}{1-k} \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$\text{hay: } y = \frac{y_o}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.19)$$

Mômen lớn nhất giữa nhịp:

$$M_{\max} = Py_{\max} = \frac{Pa}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.20)$$

Nếu đường cong ban đầu có dạng bất kỳ thì có thể phân tích thành chuỗi *Fourier* như sau: $y_o = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots$ (12.21)

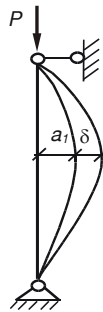
thế (12.13) vào (12.21) và giải ra y_1 ta có:

$$y_1 = k \left(\frac{a_1}{1-k} \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{a_2}{2^2-k} \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots \right) \quad (12.22)$$

vì: $k = \frac{P}{P_{th}} < 1$ nên khi P đủ lớn thì số hạng đầu trội hẳn và chỉ cần xét số hạng này.

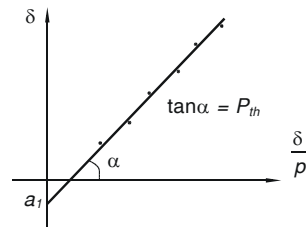
2- Xác định lực tới hạn bằng thực nghiệm thanh liên kết khớp hai đầu

Xét thanh chịu nén như trên H.12.6, trong thực tế thanh luôn có độ cong ban đầu.



Hình 12.6

Thanh có độ cong ban đầu chịu nén



Hình 12.7

Cách xác định lực tới hạn

Khi lực P đủ lớn thì dù thanh bị cong ban đầu thế nào, ta vẫn có quan hệ giữa δ và a_1 theo (12.17):

$$\delta = \frac{k}{1-k} a_1 = \frac{a_1}{\frac{P_{th}}{P} - 1}$$

hay: $\delta = P_{th} \left(\frac{\delta}{P} \right) - a_1$

Đây là phương trình bậc nhất của hai biến δ và δ/P nên có đồ thị là một đường thẳng như trên H.12.7.

Khi thí nghiệm, ứng với mỗi giá trị lực nén P_i , ta đo được chuyển vị δ_i và tính được δ_i/P_i , từ đó lập bảng kết quả thí nghiệm có dạng:

P	P_1	P_2		P_n
δ	δ_1	δ_2		δ_n
δ/P	δ_1/P_1	δ_2/P_2		δ_n/P_n

Từ đó xác định các điểm trên hệ trục $\delta/P - \delta$ và vẽ được đồ thị như trên H.12.7. Ta thường dùng phương pháp bình phương cực tiểu để xác định P_{th} và độ võng ban đầu lớn nhất a_1 .

12.6 CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM

Xét cột mảnh chịu nén lệch tâm bởi lực P như trên H.12.8.

$$y_o = a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.11)$$

Do tác dụng của lực P , cột bị cong và có phương trình $y(z)$.

Mômen uốn tại một tiết diện do lực P gây ra:

$$M = P\{e + y(z)\} = Pe + Py(z) \quad (12.23)$$

trong đó: e - là độ lệch tâm ban đầu; y - là độ võng của trục cột.

Phương trình vi phân đường đàn hồi như sau:

$$y''(z) = -\frac{M}{EI} \quad (12.24)$$

Thế (12.23) vào (12.24) và đặt $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta

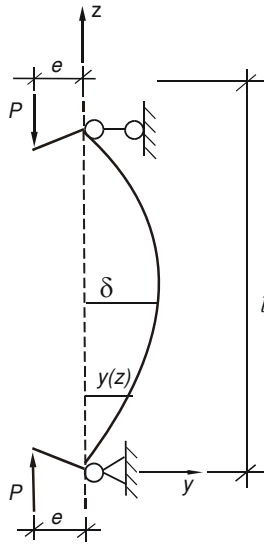
được:

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e \quad (12.25)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng:

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - e \quad (12.26)$$

trong đó: A và B - là các hằng số của nghiệm thuần nhất; e - là nghiệm riêng.



Hình 12.8 Cột có độ cong ban đầu

Các điều kiện biên:

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = e$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow A = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} = e \tan \frac{\alpha l}{2}$$

Phương trình đường đàn hồi trở thành:

$$y = e \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha z + \cos \alpha z - 1 \right) \quad (12.27)$$

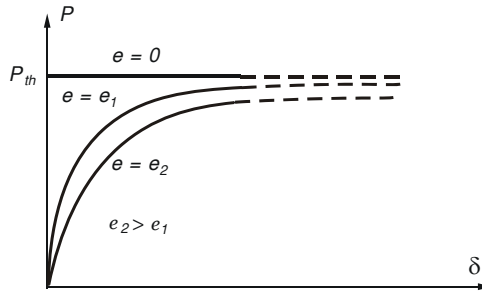
Độ võng lớn nhất tại giữa nhịp, tức $z = \frac{l}{2}$ là:

$$\delta = y_{\max} = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (12.29)$$

(12.28)

Nếu $e = 0$ hoặc $P = 0$ thì $\delta = 0$.

Đồ thị quan hệ giữa P - δ được cho trong H.12.9. Đồ thị này chỉ có ý nghĩa khi vật liệu còn đàn hồi, tức là δ còn nhỏ và $P < P_{th}$.



Hình 12.9 Đồ thị quan hệ giữa P - δ

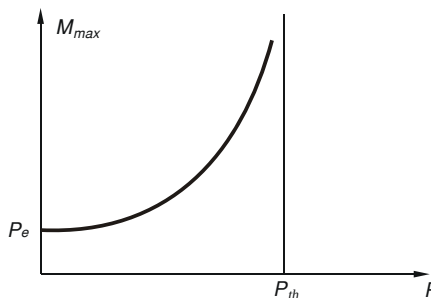
Mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp được tính:

$$M_{\max} = P(e + y_{\max}) = Pe \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI} \frac{l}{2}}} \quad (12.30)$$

Quan hệ $M_{\max}$ - P cho bởi H.12.10. Khi P nhỏ thì $M_{\max} \approx Pe$, nhưng khi P lớn thì $M_{\max}$ tăng rất nhanh.

Từ các đồ thị này ta thấy quan hệ P - δ và $M_{\max}$ - P phi tuyến.

Trong thực tế, tính cột mảnh chịu nén lệch tâm cần thiết phải xét đặc điểm phi tuyến này để đảm bảo an toàn.



Hình 12.10 Quan hệ giữa $M_{\max}$ - P

Ứng suất cực đại trong thanh:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI} \frac{l}{2}}} \right] \quad (12.31)$$

với: A - diện tích tiết diện thanh; r - bán kính quán tính

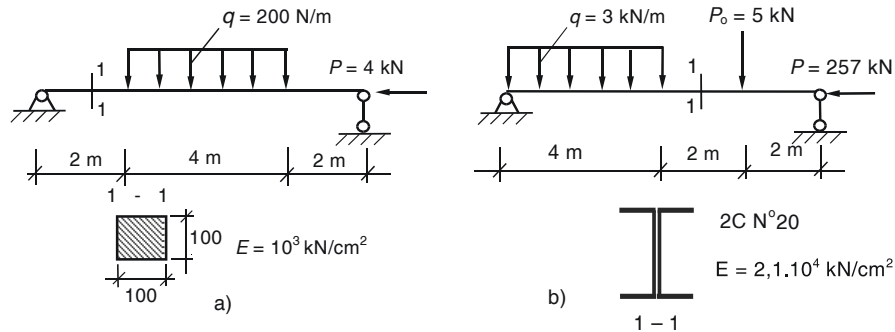
c - khoảng cách từ trục trung tâm đến mép xa nhất của tiết diện.

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số dự kiến. Trong

trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như phương trình (12.10).

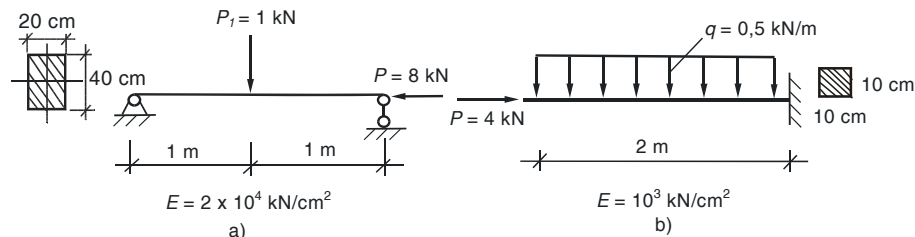
BÀI TẬP CHƯƠNG 12

12.1 Tính ứng suất nén lớn nhất theo phương pháp gần đúng của dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời cho trên H.12.11.



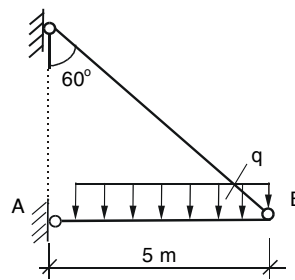
Hình 12.11

12.2 Cho dầm chịu lực như trên H.12.9. Hãy tính ứng suất pháp lớn nhất và hệ số an toàn n nếu $[\sigma] = 24 \text{ kN/cm}^2$. Tính độ võng lớn nhất.



Hình 12.12

12.3 Tính cường độ tải trọng cho dầm AB như trên H.12.10, biết độ bền $n = 1,6$. Dầm AB bằng sắt hình ống với đường kính đường kính ngoài $D = 10 \text{ cm}$, vật



Hình 12.13

phép tác dụng lên hệ số an toàn về thép số 3 có mặt trong $d = 6 \text{ cm}$ và liệu có $[\sigma] = 24$

Kiểm tra ổn định của dầm nếu lấy $k_{od} = 2$. Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Chương 13

TẢI TRỌNG ĐỘNG

13.1 KHÁI NIỆM

1- Tải trọng động

Trong các chương trước, khi khảo sát một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực, ta coi ngoại lực tác dụng là *tĩnh*, tức là những tải trọng gây ra gia tốc chuyển động bé, vì vậy khi xét cân bằng có thể bỏ qua được ảnh hưởng của lực quán tính.

Tuy nhiên, cũng có những trường hợp mà tải trọng tác dụng không thể coi là tĩnh vì gây ra gia tốc lớn, ví dụ như sự va chạm giữa các vật, vật quay quanh trục, dao động... Khi này, phải xem tác dụng của tải trọng là *động*, và phải xét đến lực quán tính khi giải quyết bài toán.

2- Phương pháp nghiên cứu

Khi giải bài toán tải trọng động, người ta thừa nhận các giả thiết sau:

- Vật liệu đàn hồi tuyến tính
- Chuyển vị và biến dạng của hệ là bé.

Như vậy, nguyên lý cộng tác dụng vẫn áp dụng được trong bài toán tải trọng động.

Khi khảo sát cân bằng của vật thể chịu tác dụng của tải trọng động, người ta thường áp dụng nguyên lý d'Alembert. Tuy nhiên, trong trường hợp vật chuyển động với vận tốc thay đổi đột ngột như bài toán va chạm thì nguyên lý bảo toàn năng lượng được sử dụng.

Để thuận tiện cho việc tính hệ chịu tải trọng động, các công thức thiết lập cho vật chịu tác dụng của tải trọng động thường đưa về dạng tương tự như bài toán tĩnh nhân với một hệ số điều chỉnh nhằm kể đến ảnh hưởng của tác dụng động, gọi là hệ số động.

Trong chương này chỉ xét các bài toán tương đối đơn giản, thường gặp, có tính chất cơ bản nhằm mở đầu cho việc nghiên cứu tính toán động lực học chuyên sâu sau này.

13.2 THANH CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC LÀ HẲNG SỐ

Một thanh tiết diện A có chiều dài L và trọng lượng riêng γ , mang một vật nặng P , được kéo lên với gia tốc a như H.13.1.a.

Tưởng tượng cắt thanh cách đầu mút một đoạn x . Xét phần dưới như trên H.13.1.b, lực tác dụng gồm có: trọng lượng vật nặng P

Trọng lượng đoạn thanh γAx

Lực quán tính tác dụng trên vật P là $\frac{P \cdot a}{g}$

Lực quán tính của đoạn thanh là $\frac{\gamma Ax a}{g}$

Nội lực động N_d tại mặt cắt đang xét.

Theo nguyên lý d'Alembert, tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên thanh theo phương đứng kể cả lực quán tính phải bằng không, ta được:

$$N_d - \gamma Ax - P - \frac{Pa}{g} - \frac{\gamma Ax a}{g} = 0$$

$$N_d = \gamma Ax + P + \frac{Pa}{g} + \frac{\gamma Ax a}{g}$$

$$\Rightarrow N_d = (\gamma Ax + P) \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Đại lượng $(\gamma Ax + P)$ chính là nội lực trong thanh ở trạng thái treo không chuyển động, gọi là nội lực tĩnh N_t .

$$\text{Ta được: } N_d = N_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.1)$$

Ứng suất trong thanh:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{N_t}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.2)$$

$$\text{có thể đặt: } K_d = 1 + \frac{a}{g} : \text{Hệ số động} \quad (13.3)$$

$$\sigma_d = \sigma_t K_d \quad (13.4)$$

Ứng suất lớn nhất tại mặt cắt trên cùng của thanh:

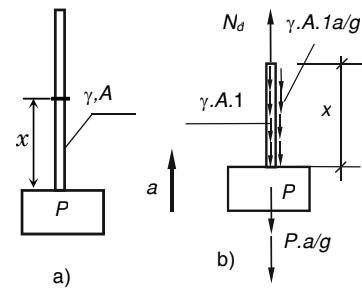
$$\sigma_{dmax} = \sigma_{t,max} \cdot K_d$$

$$\text{với: } \sigma_t = (\gamma AL + P)/A$$

Điều kiện bền trong trường hợp này là:

$$\sigma_{dmax} \leq [\sigma]_k \quad (13.5)$$

Ta thấy có hai trường hợp:



Hình 13.1

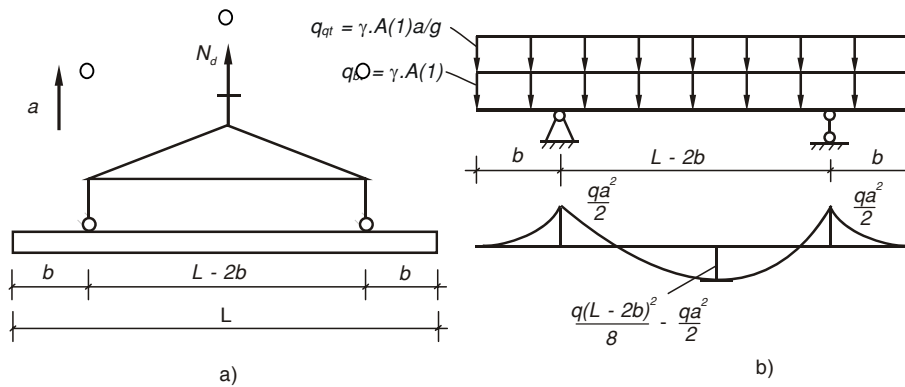
a) Vật chuyển động lên với gia tốc a
b) Nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần thanh đang xét

- Khi chuyển động lên nhanh dần đều (gia tốc a cùng chiều chuyển động) và chuyển động xuống chậm dần đều (gia tốc a ngược chiều chuyển động) hệ số động $K_d > 1$, nội lực động lớn hơn nội lực tĩnh.

- Ngược lại, khi chuyển động lên chậm dần đều và chuyển động xuống nhanh dần đều thì $K_d < 1$, nội lực động nhỏ hơn nội lực tĩnh.

Dù vậy, khi một vật thể chuyển động như bài toán trên đây, phải tính toán thiết kế với $K_d > 1$.

Thí dụ 13.1 Một thanh dài 10m có tiết diện vuông 30 cm x 30 cm và trọng lượng riêng $\gamma = 2500 \text{ kG/m}^3$, được kéo lên với gia tốc $a = 5 \text{ m/s}^2$ (H.13.2). Xác định đoạn mút thừa b để mômen âm tại gối tựa bằng mômen dương tại giữa nhịp. Vẽ biểu đồ mômen, tính ứng suất pháp lớn nhất.



Hình 13.2

a) Thanh được kéo lên với gia tốc a ; b) Sơ đồ tính và biểu đồ mômen

Khi thanh được kéo lên với gia tốc a , thanh chịu tác dụng của lực quán tính, khi đó tải trọng tác dụng lên hệ là tải trọng phân bố đều, gồm có:

$$\begin{aligned} q &= q_{bt} + q_{qt} = \gamma A(1) + \gamma A(1).a/g \\ &= 2500(0,3.0,3) + 2500(0,3.0,3).5/10 = 337,5 \text{ KG/m} \end{aligned}$$

Sơ đồ tính của thanh và biểu đồ mômen cho ở H.13.2.b.

Để mômen tại gối bằng mômen giữa nhịp, ta có:

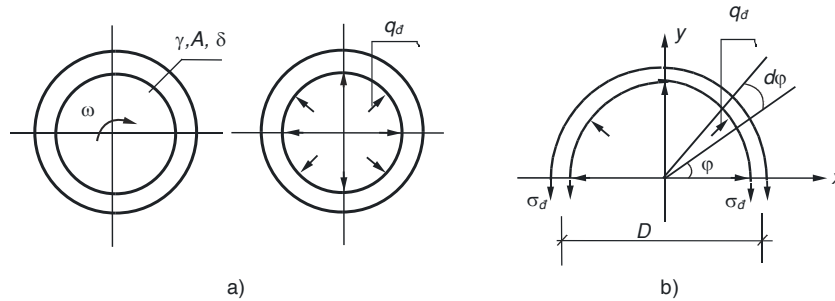
$$\frac{qb^2}{2} = \frac{q(L-2b)^2}{8} - \frac{qb^2}{2} \Rightarrow b = 0,206L$$

với $b = 0,206L$ thì mômen lớn nhất là:

$$\begin{aligned} M_{x,\max} &= \frac{qb^2}{2} = \frac{q(0,206L)^2}{2} = \frac{337,5(0,206.10)^2}{2} = 716,11 \text{ KG.m} \\ \Rightarrow \sigma_{\max} &= \frac{M_x}{W_x} = \frac{716,11.100.6}{30.30^2} = 15,9 \text{ KG/cm}^2 \end{aligned}$$

13.3 VÔ LĂNG QUAY ĐỀU

Một vô lăng có bề dày δ , đường kính trung bình D , tiết diện A , trọng lượng riêng γ , quay quanh trục với vận tốc góc không đổi ω (H.13.3.a).



Hình 13.3 a) Tải trọng tác dụng lên vô lăng
b) Tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm

Với chuyển động quay đều, gia tốc góc $\dot{\omega} = 0$, gia tốc tiếp tuyến:

$$a_t = \omega \frac{D}{2} = 0 \text{ chỉ có gia tốc pháp tuyến hướng tâm là: } a_n = \omega^2 \frac{D}{2} \quad (\text{a})$$

Một đoạn dài đơn vị của vô lăng có khối lượng $\gamma A/g$ chịu tác dụng của lực quán tính ly tâm là: $q_d = \gamma \frac{A}{g} \cdot a_n = \gamma \frac{AD\omega^2}{2g}$ (b)

Để tính nội lực trong vô lăng, dùng mặt cắt tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm, xét cân bằng của một phần (H.13.3.b), do đối xứng, trên mặt cắt vô lăng không thể có biến dạng uốn (do mômen), biến dạng trượt (do lực cắt) mà chỉ có biến dạng dài do lực dọc, nghĩa là chỉ có ứng suất pháp σ_d .

Vì bề dày δ bé, có thể xem σ_d là phân đều, lực ly tâm tác dụng trên chiều dài ds của vô lăng là $q_d ds$, phân tố ds định vị bởi góc φ , lấy tổng hình chiếu theo phương đứng, ta có:

$$2\sigma_d A = \int_0^\pi q_d ds \sin \varphi$$

thay: $q_d = \gamma AD\omega^2/2g$ và $ds = D d\varphi/2$ vào, ta được:

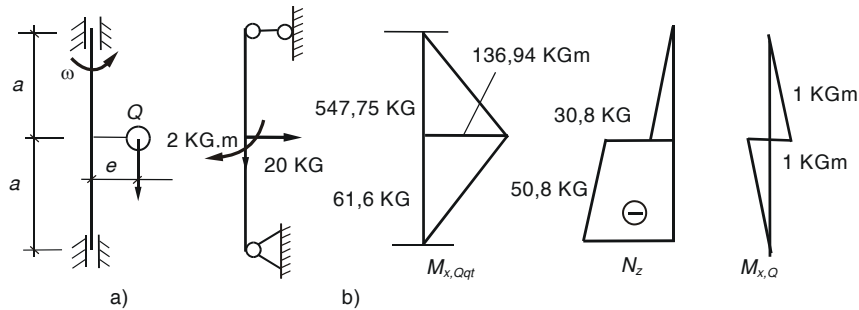
$$\sigma_d = \gamma \frac{D^2 \omega^2}{4g} \quad (13.6)$$

Vì ứng suất trong vô lăng là ứng suất kéo nên điều kiện bền vô lăng:

$$\sigma_d \leq [\sigma]_k \quad (13.7)$$

Chú ý. Khi tính vô lăng, ta đã bỏ qua ảnh hưởng của các nan hoa nối trục và vô lăng, nếu kể đến thì ứng suất kéo trong vô lăng sẽ giảm, độ phức tạp trong tính toán tăng lên nhiều, không cần thiết lắm trong tính toán thực hành.

Ví dụ 13.2 Một trục đứng đường kính $D = 10 \text{ cm}$, trọng lượng riêng $\gamma = 7850 \text{ kG/m}^3$, mang một khối lượng lệch tâm $Q = 20 \text{ kG}$ (H.13.4.a), trục quay với vận tốc $n = 500 \text{ vòng/phút}$. Kiểm tra bền trục, tính chuyển vị tại điểm đặt khối lượng. Cho: $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$; $E = 2.10^6 \text{ kG/cm}^2$, $a = 0,5 \text{ m}$.



Hình 13.4

Giải. Vận tốc góc:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2(3,14)500/60 = 52,33 \text{ rad/s}$$

Lực quán tính ly tâm Q_{lt} do trọng lượng Q là:

$$Q_{qt} = \frac{Q}{g} \omega^2 e = 20.52,33^2.0,1 = 5476,85 \text{ N}$$

$$Q_{qt} = 547,68 \text{ KG}$$

Bỏ qua ảnh hưởng do tác dụng tĩnh của trọng lượng Q và trọng lượng bản thân của trục vì chúng nhỏ so với lực ly tâm Q_{lt} .

Mômen do lực ly tâm gây ra là (H.13.4.b):

$$M_{x\max} = Q_{lt}L/4 = 547,68(1)/4 = 136,92 \text{ kGm}$$

Ứng suất lớn nhất của trục:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W_x} = \frac{136,92.100}{3,14(10)^2 / 32} = 1395,36 \text{ kG/cm}^2$$

Nếu kể đến trọng lượng bản thân trục và tác dụng tĩnh của Q , tại tiết diện giữa trục chịu tác dụng của các nội lực như sau (H.13.4.b)

$$N_z = 50,8 \text{ kG (nén); } M_x = 135,92 \text{ kGm.}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N_z}{A} + \frac{M_{x,\max}}{W_x} = \frac{30,8}{3,14(10)^2 / 4} + \frac{136,92.100}{3,14(10)^2 / 32} \\ &= 0,392 + 1395,75 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, trọng lượng bản thân của trục và tác dụng tĩnh của Q có thể bỏ qua.

Chuyển vị do tác dụng của lực Q_{lt} có thể tính theo công thức sau:

$$y = \frac{QL^3}{48EI_x} = \frac{547,75.(100)^3}{48.2.10^6.3,14(10)^4 / 64} = 0,0116 \text{ cm}$$

13.4 DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1- Khái niệm

Một hệ chuyển động qua lại một vị trí cân bằng xác định nào đó, Ví dụ quả lắc đồng hồ, gọi là hệ dao động. Khi *hệ chuyển từ vị trí cân bằng này sang vị trí cân bằng kế tiếp sau khi đã qua mọi vị trí xác định bởi quy luật dao động, ta gọi hệ đã thực hiện một dao động.*

Chu kỳ là thời gian hệ thực hiện một dao động, ký hiệu là T tính bằng giây (s).

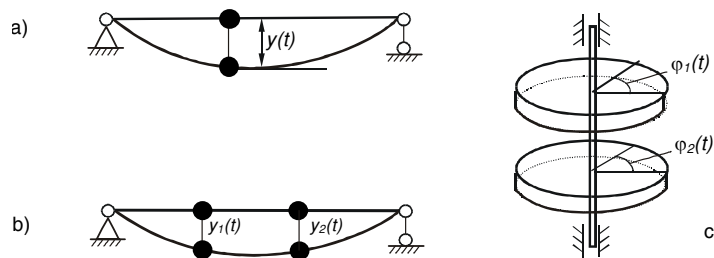
Tần số là số dao động trong một giây, ký hiệu là f , chính là nghịch đảo của chu kỳ, $f = 1 / T$ (1/s).

Số dao động trong 2π giây gọi là *tần số góc*, hay còn gọi là *tần số vòng*, ký hiệu là ω , ta thấy $\omega = 2\pi / T$ (1/s).

Bậc tự do là số thông số độc lập xác định vị trí của hệ đối với một hệ quy chiếu nào đó. Đối với một hệ dao động như trên H.13.5.a, vị trí của hệ xác định bởi độ dịch chuyển (y) theo thời gian (t), hệ quy chiếu sẽ là (t, y) .

Khi tính một hệ dao động, ta cần đưa về *sơ đồ tính*. Xác định sơ đồ tính của một hệ dựa trên điều kiện phải phù hợp với hệ thực trong mức độ gần đúng cho phép.

Xét dầm cho trên H.13.5.a, nếu khối lượng dầm không đáng kể, có thể xem dầm như một liên kết đàn hồi không khối lượng, vị trí của hệ quyết định do vị trí của khối lượng vật nặng, hệ có *một bậc tự do*, vì chỉ cần biết tung độ $y(t)$ của vật nặng là xác định được vị trí của hệ tại mọi thời điểm (t). Với hệ ở H.13.5.b, bậc tự do là hai, vì cần phải biết $y_1(t)$, $y_2(t)$. Đối với trục chịu xoắn (H.13.5.c), bậc tự do cũng là hai, vì cần phải biết góc xoắn $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.



Hình 13.5 a) Hệ một bậc tự do; b), c) Hệ hai bậc tự do

Khi kể đến khối lượng của dầm trên H.13.5.a, hệ trở thành vô hạn bậc tự do, vì phải biết vô số tung độ $y(t)$ tại vô số điểm khối lượng suốt chiều dài dầm. Trong trường hợp này, cần chọn sơ đồ tính thích hợp, ví dụ nếu khối lượng dầm là nhỏ so với khối lượng vật nặng, có thể coi vật nặng đặt trên một liên kết đàn hồi không khối lượng, hệ có một bậc tự do.

Nếu không thể bỏ qua
có thể đưa về *hệ hữu hạn bậc*
xem khối lượng dầm gồm N
trên N điểm nút của thanh đàn hồi không khối lượng (H.13.6), N càng lớn,
độ chính xác tính toán càng cao.



Hình 13.6 Hệ hữu hạn bậc tự do

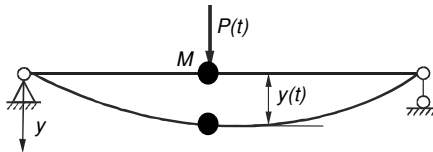
khối lượng dầm,
tự do, bằng cách
khối lượng m_i đặt
khối lượng (H.13.6), N càng lớn,

Một hệ đàn hồi có thể dao động tự do hay dao động cưỡng bức.

Dao động cưỡng bức là dao động của hệ khi chịu một tác động biến đổi theo thời gian, gọi là lực kích thích, tồn tại trong suốt quá trình hệ dao động như dao động của dầm mang một mô tơ điện khi nó hoạt động, khối lượng lệch tâm của rôto gây ra lực kích thích.

Dao động tự do là dao động do bản chất tự nhiên của hệ khi chịu một tác động tức thời, không tồn tại trong quá trình hệ dao động như dao động của dây đàn.

2- Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do



Hình 13.7 Hệ một bậc tự do chịu dao động cưỡng bức

Xét hệ một bậc tự do chịu tác dụng một lực kích thích thay đổi theo thời gian $P(t)$ đặt tại khối lượng M (H.13.7), tại thời điểm (t) , độ võng của khối lượng M là $y(t)$. Giả thiết lực cản môi trường tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động, hệ số tỷ lệ β .

Gọi δ là chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do lực đơn vị đặt tại đó gây ra. Chuyển vị $y(t)$ là kết quả của các tác động:

- Lực kích thích $P(t)$ gây ra chuyển vị $P(t)\delta$
- Lực quán tính $-M\ddot{y}(t)$ gây ra chuyển vị $-M\ddot{y}(t)\delta$
- Lực cản môi trường $-\beta\dot{y}(t)$ gây ra chuyển vị $-\beta\dot{y}(t)\delta$

ta được
$$y(t) = P(t)\delta + [-M\ddot{y}(t)\delta] + [-\beta\dot{y}(t)\delta] \quad (a)$$

$$M\delta\ddot{y}(t) + \beta\delta\dot{y}(t) + y(t) = P(t).\delta \quad (b) \quad (b)$$

Chia hai vế cho $M\delta$ và đặt:

$$\frac{\beta}{M} = 2\alpha; \quad \frac{1}{M\delta} = \omega^2 \quad (c)$$

phương trình (b) trở thành:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t).\delta.\omega^2 \quad (13.8)$$

(13.8) là phương trình vi phân dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do.

3- Dao động tự do

Khi không có lực kích thích và lực cản bằng không, hệ dao động tự do, phương trình (13.8) trở thành phương trình vi phân của dao động tự do:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.9)$$

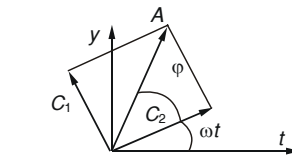
Tích phân phương trình (13.9), ta được nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (d)$$

Sử dụng giản đồ cộng các vectơ quay (H.13.8), có thể biểu diễn hàm (a) dưới dạng:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (e)$$

Hàm (e) là hàm sin, chứng tỏ dao động tuần hoàn, điều hòa. Biên độ dao động là $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, tần số góc ω , độ lệch pha φ . ω còn được tính theo công thức:



Hình 13.8 Giản đồ các vectơ quay

tỏ dao động
hoàn, điều hòa.
 $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, tần số
gọi là tần số riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} \quad (13.10)$$

Gọi P là trọng lượng của khối lượng M , ta có $M = P/g$, thay vào (13.10), ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$

Tích số $(P.\delta)$ chính là *giá trị chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do trọng lượng P của khối lượng dao động M tác dụng tĩnh gây ra*, gọi là Δt .

Công thức tính tần số của dao động tự do trở thành:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} \quad (13.11)$$

$$\text{Chu kỳ của dao động tự do: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\Delta t}} \quad (13.12)$$

4- Dao động tự do có cản

Trong (13.8), cho $P(t) = 0$, ta được phương trình vi phân của dao động tự do có cản, hệ một bậc tự do:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.13)$$

Nghiệm của (13.13) tùy thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$K^2 + 2\alpha K + \omega^2 = 0$$

Khi: $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 \geq 0$, phương trình đặc trưng có nghiệm thực:

$$K_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = C_1 e^{K_1 t} + C_2 e^{K_2 t}$$

Ta thấy hàm $y(t)$ không có tính tuần hoàn, do đó hệ không có dao động, ta không xét trường hợp này.

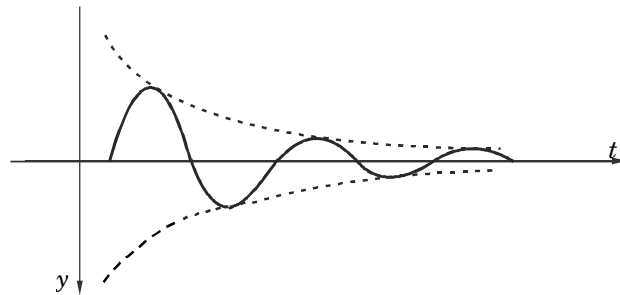
Khi: $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 < 0$, đặt: $\omega_1^2 = \omega^2 - \alpha^2$, phương trình đặc trưng có nghiệm ảo: $K_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_1$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Hàm $y(t)$ là một hàm sin có tính tuần hoàn, thể hiện một dao động với tần số góc ω_1 , độ lệch pha φ_1 , biên độ dao động là một hàm mũ âm $A_1 e^{-\alpha t}$, tắt rất nhanh theo thời gian.

Tần số dao động $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, nhỏ hơn tần số dao động tự do ω (H.13.9).



Hình 13.9 Đồ thị hàm số dao động tự do có cản

4- Dao động cưỡng bức có cản

Từ phương trình vi phân dao động cưỡng bức có cản hệ một bậc tự do (13.8): $q \ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t)\delta\omega^2$ (f)

Với các bài toán kỹ thuật thông thường, lực kích thích $P(t)$ là một hàm dạng sin, do đó có thể lấy $P(t) = P_0 \sin \omega t$, khi đó phương trình vi phân (f) có dạng:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \delta\omega^2 P_0 \sin \omega t \quad (13.14)$$

Nghiệm tổng quát của (13.14) có dạng:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

trong đó: $y_1(t)$ - là một nghiệm tổng quát của (13.14) không vế phải, chính là nghiệm của dao động tự do có cản (e):

$$y_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (g)$$

$y_2(t)$ - là một nghiệm riêng của (13.14) có vẻ phải, vì vẻ phải là một hàm sin, do đó có thể lấy $y_2(t)$ dạng sin:

$$y_2(t) = C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$$

(h)

với: C_1 và C_2 - là các hằng số tích phân, xác định bằng cách thay $y_2(t)$ và các đạo hàm của nó vào (13.14), rồi đồng nhất hai vế. Sử dụng giản đồ vectơ quay biểu diễn (h) dưới dạng:

$$y_2(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (i)$$

Như vậy, phương trình dao động của hệ là:

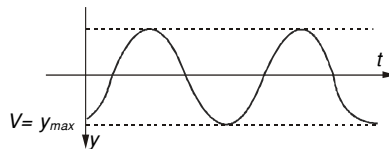
$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + V \sin(rt + \theta) \quad (j)$$

Phương trình (j) chính là độ võng $y(t)$ của dầm.

Số hạng thứ nhất của vế phải trong (j) là một hàm có biên độ tắt rất nhanh theo quy luật hàm mũ âm, sau một thời gian ngắn, hệ dao động theo quy luật:

$$y(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (13.15)$$

Đó là một hàm sin biểu diễn một dao động tuần hoàn, điều hòa, tần số góc của dao động bằng tần số lực kích thích r , độ lệch pha θ , biên độ dao động V (H.13.10).



Hình 13.10 Đồ thị biểu diễn dao động cưỡng bức có cản

Biên độ dao động chính là độ võng cực đại của dầm y_{max} , ta có:

$$V = y_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (k)$$

Tính các giá trị của C_1 và C_2 , thay vào (k), ta được độ võng cực đại của dầm:

$$y_{max} = \frac{P_o \delta}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (h)$$

Tích số $P_o \delta$ chính là giá trị của chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do lực có giá trị P_o (biên độ lực kích thích) tác dụng tĩnh tại đó gây ra, đặt là y_t , ta có:

$$y_{max} = y_t \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.16)$$

có thể viết là: $y_{max} = y_t K_d$

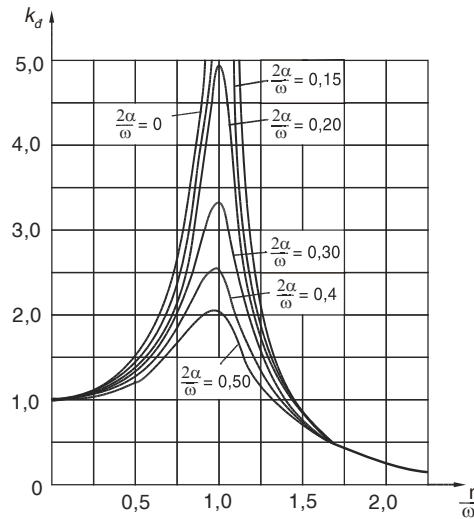
với:

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.17)$$

K_d được gọi là hệ số động, thể hiện ảnh hưởng của tác dụng động so với tác dụng tĩnh ứng với trị số của biên độ lực.

5- Hiện tượng cộng hưởng

Khảo sát sự biến động K_d ở công thức coi K_d là một hàm hai $(r/\omega, 2\alpha/\omega)$. Ứng với một ta vẽ được đồ thị biểu $(K_d, r/\omega)$ có dạng hình tại hoành độ $\frac{r}{\omega} = 1$, lần giá trị khác nhau ứng với dần, ta thấy đỉnh của đồ nhanh, với $\alpha = 0$, giá trị cực (H.13.11), nghĩa là vô cùng.



Hình 13.11 Đồ thị hàm số $K_d = f(r/\omega; 2\alpha/\omega)$ với $2\alpha/\omega$ là các hằng số cho trước

thiên của hệ số (13.17) bằng cách biến $K_d = f$ giá trị xác định $\frac{2\alpha}{\omega}$, diễn quan hệ chuồng mà đỉnh lượt cho $\frac{2\alpha}{\omega}$ nhiều hệ số cản α giảm thị (K_d) tăng của K_d tiến đến vô độ vồng dần lớn

Hiện tượng biên độ dao động tăng đột ngột khi tần số lực kích thích bằng tần số riêng của hệ đàn hồi gọi là hiện tượng cộng hưởng. Trên đồ thị còn cho thấy khi hai tần số này xấp xỉ nhau ($r/\omega \in [0,75 - 1,5]$), biên độ tăng rõ rệt, người ta gọi là miền cộng hưởng. Hiện tượng cộng hưởng rõ ràng rất nguy hiểm cho chi tiết máy hay công trình làm việc trong miền cộng hưởng, do đó trong thiết kế, ta phải tính toán sao cho hệ dao động nằm ngoài miền cộng hưởng.

Đồ thị cho thấy nên chọn tỷ số r/ω lớn hơn 2, khi đó K_d nhỏ hơn 1, bài toán động ít nguy hiểm hơn bài toán tĩnh. Để có r/ω lớn, thường phải giảm ω , nghĩa là chuyển vị Δt phải lớn. Muốn vậy, phải giảm độ cứng của thanh đàn hồi, điều này nhiều lúc mâu thuẫn với yêu cầu độ bền của công trình. Để tránh làm giảm độ cứng công trình có thể đặt lò xo hay loại vật liệu có khả năng phát tán năng lượng đệm giữa khối lượng dao động và thanh đàn hồi.

Có trường hợp khi khởi động mô tơ, tốc độ mô tơ tăng dần đến tốc độ ổn định, một thời gian ngắn ban đầu công trình có thể ở trong miền cộng

hưởng, cần phải dùng loại động cơ tăng tốc nhanh để hiện tượng cộng hưởng nếu có xảy ra cũng chỉ trong thời gian rất ngắn.

Nếu khi hoạt động, công trình dao động với K_d lớn, cần tính toán kỹ để sử dụng các bộ giảm chấn làm tiêu hao năng lượng dao động hay tăng hệ số cản.

Trên H.13.11, ta thấy, khi tỷ số $r/\omega \notin [0,5 - 2]$, các đường cong K_d gần trùng nhau, hệ số cản xem như không ảnh hưởng, hoặc khi hệ số cản không đáng kể, có thể tính K_d theo công thức:

$$K_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right|} \quad (13.18)$$

Vì các đại lượng như chuyển vị, nội lực hay ứng suất tỷ lệ bậc nhất với ngoại lực, ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma_t K_d + \sigma_{t,ds} \\ \tau_d &= \tau_t K_d + \tau_{t,ds} \\ M_d &= M_t K_d + M_{t,ds} \end{aligned} \quad (13.19)$$

trong đó: σ_t, τ_t - là các ứng suất do tải trọng có giá trị bằng biên độ lực kích thích (P_0) tác dụng tĩnh

$\sigma_{t,ds}, \tau_{t,ds}$ - là các ứng suất do tải trọng tĩnh đặt sẵn, mà khi không có dao động nó vẫn tồn tại như trọng lượng bản thân mô-tơ.

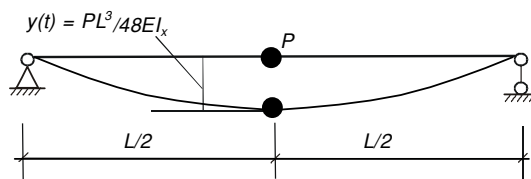
Điều kiện bền:

$$\sigma_{d\max} \leq [\sigma] \text{ hay } \tau_{d\max} \leq [\tau] \quad (13.20)$$

6- Phương pháp thu gọn khối lượng

Khi phải kể đến khối lượng dầm (các liên kết đàn hồi) ảnh hưởng quá trình dao động và không đòi hỏi độ chính xác cao, có thể tính gần đúng như hệ một bậc tự do theo *phương pháp thu gọn khối lượng* như sau.

Xét một dầm tựa đơn (H.13.12) khối lượng M tại giữa nhịp, giả sử khối lượng dầm đủ nhỏ để không làm thay đổi dạng dao động như khi chỉ có một khối lượng M , nếu gọi $y(t)$ là độ võng của M tại giữa nhịp, ta có:



Hình 13.12 Dầm đơn dao động có kể đến khối lượng dầm

Độ võng tại mặt cắt tại hoành độ z sẽ là:

$$y(z) = \frac{PL^2 z}{16EI_x} - \frac{Pz^3}{12EI_x} = y(t) \frac{Lz - 4z^3}{L^3}$$

Gọi q là trọng lượng 1 m dài của dầm, động năng của một phần tử khối lượng dài dz của dầm là:

$$dT = \frac{1}{2} \frac{qdz}{g} \frac{(3L^2z - 4z^3)^2}{(L^3)^2} \frac{dy^2}{dt^2}$$

Động năng của toàn dầm là:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{qdz(3L^2z - 4z^3)^2}{g(L^3)^2} \frac{dy^2}{dt^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \frac{qL}{g} \frac{dy^2}{dt^2} \quad (13.21)$$

Động năng của toàn dầm tương đương động năng của một khối lượng $m = (17/35)(qL/g)$ đặt tại giữa dầm. Như vậy, trên cơ sở tương đương động năng, có thể xem hệ là một bậc tự do với khối lượng dao động tại giữa dầm là:

$$M_1 = m + \frac{17}{35} \cdot \frac{qL}{g} \quad (13.22)$$

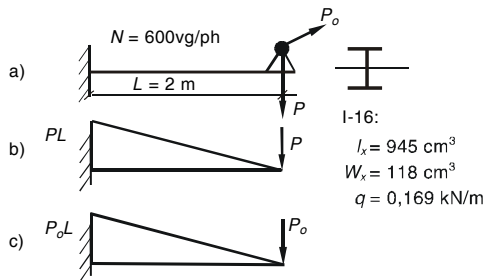
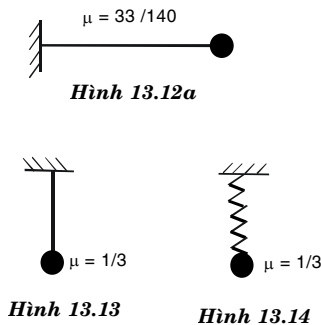
trong đó: qL/g - chính là khối lượng của toàn bộ dầm.

Gọi μ là hệ số thu gọn khối lượng. Ta có:

- Đối với dầm đơn (H.13.12), khối lượng thu gọn tại giữa nhịp, $\mu = 17/35$

- Đối với dầm cong xon (H.13.12a), khối lượng thu gọn tại đầu tự do, $\mu = 33/140$.

- Đối với lò xo dao động dọc, thanh thẳng dao động dọc (H.13.14), khối lượng thu gọn tại đầu tự do, $\mu = 1/3$.



Hình 13.15 a) Dầm công xon I-16 mang một mô tơ
b) và c) Sơ đồ tính và biểu đồ mô men do trọng lượng mô tơ P và lực ly tâm P

Ví dụ 13.3 Một dầm công xon tiết diện I-16 mang một mô tơ trọng lượng $P = 2,5 \text{ kN}$, vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô tơ sinh ra lực ly tâm $0,5 \text{ kN}$ (H.13.15). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm q , tính lại ứng suất và độ võng. Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; hệ số cản $\alpha = 2(1/s)$.

Giải. Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng sin $P(t) = P_o \sin rt$, với $P_o = 0,5 \text{ kN}$ và tần số góc r .

a) Không kể đến trọng lượng dầm

Ứng suất động: $\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động:
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

trong đó: $r = 2\pi n/60 = 2\pi 600/60 = 62,8 \text{ rad/s}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với: $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$

$$\Delta t = \frac{PL^3}{3EI_x} = \frac{2,5(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,19 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,19}} = 29$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{62,8^2}{29^2})^2 + \frac{4.2^2.62,8^2}{29^4}}} = 0,27$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, do đó ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{PL}{W_x} = \frac{2,5.3.100}{118} = 6,35 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh được tính tương tự:

$$\sigma_{t,max} = \frac{P_o L}{W_x} = \frac{0,5.3.100}{118} = 1,27 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,27) + 6,35 = 6,69 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do là:

$$y_{t,P} = \Delta t = 1,19 \text{ cm}$$

suy ra chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại đầu tự do là:

$$y_{t,P_o} = \frac{0,5}{2,5} 1,19 = 0,238 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$y_d = 0,238(0,27) + 1,19 = 1,25 \text{ cm}$$

b) Kể đến trọng lượng dầm

Để đưa hệ về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở đầu tự do có đặt một khối lượng:

$$m = \frac{33}{140} \frac{\gamma AL}{g}$$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng: $\frac{33}{140} \gamma aAL = 0,119 \text{ kN}$

Chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(P + 0,119)L^3}{3EI} = \frac{(2,5 + 0,119)(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,247 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,247}} = 28,31$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{62,8^2}{28,31^2})^2 + \frac{4 \cdot 2^2 \cdot 62,8^2}{28,31^4}}} = 0,25$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{(PL + qL^2/2)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds,max} = \frac{(2,5 \cdot 3 + 0,169 \cdot 3^2/2) \cdot 100}{118} = 7 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh không khác phần trên là $1,27 \text{ kN/cm}^2$.

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,25) + 7 = 7,31 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

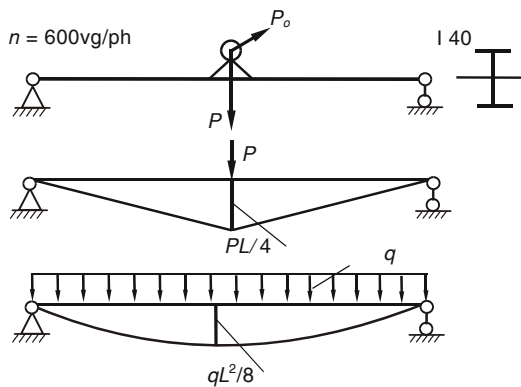
$$y_{t,P} = PL^3/3EI_x + qL^4/8EI_x = 1,19 + 0,307 = 1,497 \text{ cm}$$

còn chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại đầu tự do vẫn là $0,238 \text{ cm}$.

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$\sigma_d = 0,238(0,25) + 1,497 = 1,556 \text{ cm}$$

Ví dụ 13.4 Một dầm 40, mang một mô tơ 2,5 kN, vận tốc 600 hoạt động mô tơ sinh kN (H.13.16). Kể đến tính ứng suất lớn nhất, Cho: $E = 2 \cdot 10^4$ $\alpha = 2(1/s)$; thép I40 có $W_x = 947 \text{ cm}^3$, trọng $q = 0,56 \text{ kN/m}$.



Hình 13.16 a) Dầm đơn I40 mang một mô tơ b) và c) Sơ đồ tĩnh và biểu đồ mômen do trọng lượng mô tơ P và trọng lượng bản thân

thép tiết diện I - trọng lượng $P = 2,5 \text{ kN}$, vận tốc 600 vòng /phút, khi ra lực ly tâm $0,5 \text{ kN}$ trọng lượng dầm, độ võng của dầm. kN/cm^2 ; hệ số cản $l_x = 19840 \text{ cm}^4$, lượng mét dài

Giải. Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng sin $P(t) = P_o \sin rt$, với $P_o = 0,5 \text{ kN}$ và tần số góc r .

Ứng suất động: $\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động: $K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$

trong đó: $r = 2\pi n/60 = 2.\pi.600/60 = 62,8 \text{ rad/s}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với: $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$.

Độ võng tại giữa dầm do lực tập trung P là: $\Delta t = \frac{PL^3}{48EI_x}$

Kể đến trọng lượng dầm, phải đưa dầm về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở giữa dầm có đặt một khối lượng: $m = \frac{17}{35} \frac{\gamma AL}{g}$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:

$$\frac{17}{35} \gamma AL = 0,56(12) = 6,72 \text{ kN}$$

khi đó chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(2,5 + 6,72)L^3}{48EI_x} = \frac{(9,22)(1200)^3}{48.2.10^4.18930} = 0,876 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,876}} = 33,77$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{62,8^2}{33,77^2})^2 + \frac{4.2^2 62,8^2}{33,77^4}}} = 0,405$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P và do trọng lượng bản thân q (H.13.16), ta thấy tại giữa nhịp mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds, \max} = \frac{M_{x, \max, P}}{W_x} = \frac{(PL/4 + qL^2/8)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds, \max} = \frac{(2,5.12/4 + 0,56.12^2/8).100}{947} = 1,856 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh là:

$$\sigma_{t, P_o} = \frac{P_o L}{4W_x} = \frac{0,5.(12)100}{4(947)} = 0,158 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,158(0,405) + 1,856 = 1,92 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại giữa nhịp gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t, P} = \frac{PL^3}{48EI_x} + \frac{5qL^4}{384EI_x} = 0,237 + 0,4 = 0,637 \text{ cm}$$

còn chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại giữa nhịp là:

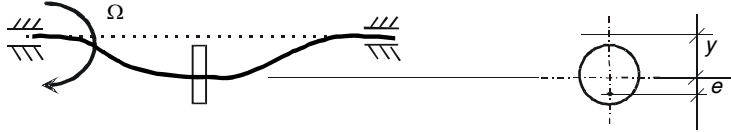
$$0,237 \times (0,5/2,5) = 0,0474 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại giữa nhịp, ta có:

$$y_d = 0,0474(0,405) + 0,637 = 0,656 \text{ cm}$$

13.5 TỐC ĐỘ TỐI HẠN CỦA TRỤC

Một trục quay mang một pu li khối lượng M , quay đều với vận tốc góc Ω , gọi độ võng của trục tại pu li là y , giả sử trọng tâm của pu li lệch tâm so với tâm trục là e (H.13.17).



Hình 13.17 Trục quay mang khối lượng lệch tâm

Lực ly tâm tác dụng lên trục:

$$F = M \Omega^2 (e + y)$$

Gọi δ là chuyển vị tại vị trí pu li do lực đơn vị gây ra, ta có, chuyển vị gây ra bởi lực ly tâm F là:

$$y = M \delta \Omega^2 (e + y) \quad (i)$$

suy ra
$$y = \frac{e \Omega^2}{\frac{1}{M \delta} - \Omega^2} \quad (13.23)$$

Theo công thức (13.23), độ võng trục cực đại khi $\Omega^2 = \frac{1}{M \delta}$, nghĩa là khi tốc độ của trục bằng tần số riêng $\omega = \sqrt{\frac{1}{M \delta}}$, gọi là *tốc độ tới hạn* của trục quay. Khi trục làm việc ở tốc độ gần tốc độ tới hạn, độ võng lớn, chi tiết máy có tiếng ồn, nên trong thiết kế phải tính toán sao cho tốc độ khác xa tốc độ tới hạn.

Nhận xét rằng, nếu tốc độ trục Ω^2 lớn hơn nhiều so với $(1/M \delta)$, công thức (13.23) chứng tỏ độ võng $y \approx -e$, trọng tâm của pu li gần trùng với tâm trục, trục ở trạng thái làm việc tốt nhất.

13.6 DAO ĐỘNG CỦA HỆ HAI BẬC TỰ DO

Xét một hệ có 2 bậc tự do như trên H.13.18. Nhiều bài toán thực tiễn có thể đưa về sơ đồ tính này.

Gọi $y_1(t)$, $y_2(t)$ là chuyển vị của M_1 , M_2 ; δ_{ij} là chuyển vị tại điểm i do lực đơn vị đặt tại điểm j gây ra. Có thể chứng minh $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Ta có: $y_1(t) = \delta_{11} (-M_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12} (-M_2 \ddot{y}_2)$

$$y_2(t) = \delta_{21} (-M_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22} (-M_2 \ddot{y}_2) \quad (a)$$

Nghiệm tổng quát của (a) có dạng: Hình 13.18

Hệ hai bậc tự do

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (I)$$

thay (b) vào (a), ta được hệ phương trình thuần nhất:

$$A_1 (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) + A_2 \delta_{12} M_2 \omega^2 = 0$$

$$A_1 \delta_{21} M_1 \omega^2 + A_2 (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) = 0 \quad (c)$$

để A_1 , A_2 khác không thì định thức các hệ số của (c) phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) & \delta_{12} M_2 \omega^2 \\ \delta_{21} M_1 \omega^2 & (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

từ (d), và $\delta_{12} = \delta_{21}$, ta được:

$$\omega^4 M_1 M_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (\delta_{11} M_1 + \delta_{22} M_2) + 1 = 0 \quad (e)$$

Phương trình (e) gọi là phương trình tần số, giải (e), ta xác định được hai tần số riêng xếp thứ tự từ nhỏ đến lớn ω_1 , ω_2 . Như vậy, hệ có hai bậc tự do sẽ có hai tần số riêng.

Ứng với tần số ω_1 , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

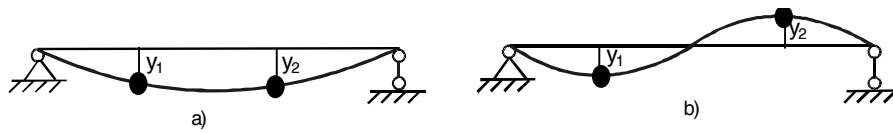
$$y_2(t) = A_{21}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Ứng với tần số ω_2 , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = A_{22}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- Khi hệ dao động với tần số ω_1 , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa cùng pha (H.13.19.a), gọi là dạng dao động chính thứ nhất.



Hình 13.19 a) Dạng dao động chính thứ nhất
b) Dạng dao động chính thứ hai

- Khi hệ dao động với tần số ω_2 , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa lệch pha 180° (H.13.19.b), gọi là dạng dao động chính thứ hai.

Dao động của cả hệ một dao động phức hợp có phương trình:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = \lambda_1 A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \lambda_2 A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (f)$$

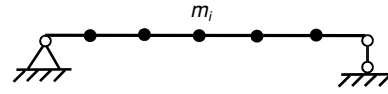
(f) không phải là một dao động điều hòa, nhưng có thể biểu diễn theo các dạng chính.

13.7 PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH

Đối với hệ nhiều bậc tự do, việc xác định tần số riêng bằng phương pháp chính xác rất phức tạp, do đó

trong một số trường hợp người ta dùng phương pháp gần đúng. Trong phần này, ta xét phương pháp Rayleigh.

Coi dầm như một thanh đàn hồi mang n khối lượng M_i , mỗi khối lượng bằng khối lượng của từng đoạn thanh dầm (H.13.20).



Hình 13.20 Hệ n bậc tự do

Giả sử hệ dao động tự do với các dạng chính, khi đó phương trình chuyển động của một khối lượng M_i là một hàm điều hòa, có thể viết:

$$y_i(t) = A_i \sin(\omega t + \varphi)$$

vận tốc của M_i là: $\frac{dy_i(t)}{dt} = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi)$

Khi hệ ở vị trí cân bằng $y(t) = 0$, vận tốc cực đại, thế năng biến dạng đàn hồi lúc đó bằng không, động năng hệ lớn nhất có giá trị bằng:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2$$

Khi hệ ở xa vị trí cân bằng nhất, vận tốc bằng không, thế năng cực đại. Gọi phương trình đường đàn hồi của dầm là $y(z)$.

$$\text{Vì: } y'' = \frac{-M}{EJ} \Rightarrow M = -EI y''$$

áp dụng công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, ta được:

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, $T = U$, ta được:

$$\frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2 = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

$$\text{tần số riêng là: } \omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum M_i y_i^2} \quad (13.24)$$

Với dầm đơn, tiết diện đều, trọng lượng phân bố $q = \gamma A$, đường đàn hồi do tải trọng bản thân là:

$$y(z) = \frac{q}{24EI} (z^4 - 4Lz^3 + 6L^2 z^2)$$

khi dầm dao động, có thể chọn dạng đa thức như trên:

$$y(z) = z^4 - 4Lz^3 + 6L^2 z^2$$

Áp dụng phương pháp Rayleigh ta tính được tần số của dao động chính thứ nhất là:

$$\omega_1 = \frac{3,49}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

So với giá trị giải theo phương pháp chính xác là:

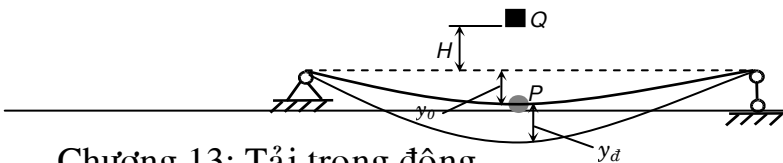
$$\omega_1 = \frac{3,52}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

thì sai số là 1% đủ nhỏ, chấp nhận được trong kỹ thuật.

13.8 VA CHẠM CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1- Va chạm đứng

Xét một dầm mang vật nặng P và chịu va chạm bởi vật nặng Q , rơi theo phương thẳng đứng từ độ cao H vào vật nặng P như trên H.13.21. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật Q va chạm P cả hai vật cùng chuyển động thêm xuống dưới và đạt chuyển vị lớn nhất y_d .



Chương 13: Tải trọng động
Hình 13.21 Hệ một bậc tự do chịu va chạm đứng

Chuyển vị của vật nặng P do trọng lượng bản thân của nó được ký hiệu là y_0 .

Gọi V_0 là vận tốc của Q ngay trước lúc chạm vào P , V là vận tốc của cả hai vật P và Q ngay sau khi va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng trước và ngay sau khi va chạm, ta được:

$$\frac{QV_0}{g} = \frac{(P+Q)}{g} V$$

hay
$$V = \frac{Q}{P+Q} V_0 \quad (a)$$

Trong bài toán này, ta dựa vào phương pháp năng lượng để tìm chuyển vị trong dầm.

Ta gọi trạng thái 1 tương ứng với khi vật Q vừa chạm vào vật P và cả hai cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc V (lúc này chuyển vị là y_0). Trạng thái 2 tương ứng với khi Q và P đạt tới chuyển vị tổng cộng $y_0 + y_d$.

Động năng của vật P và Q ở trạng thái 1 ngay sau khi va chạm:

$$T_1 = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} \left(\frac{Q}{P+Q} V_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2$$

Động năng của vật P và Q ở trạng thái 2:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} 0^2 = 0$$

Độ giảm động năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 \quad (b)$$

Độ thay đổi thế năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$\pi = mgh = \frac{P+Q}{g} g(y_d + y_o - y_o) = (P+Q)y_d \quad (c)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, độ thay đổi cơ năng của vật P và Q sẽ chuyển thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong dầm.

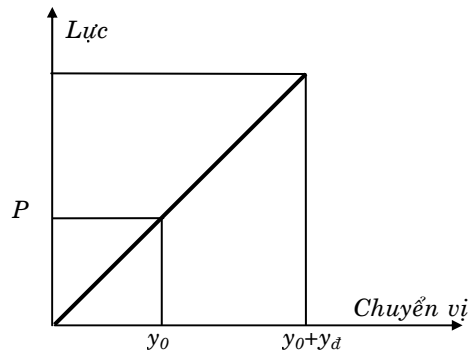
$$U = T + \pi$$

Tính U dựa vào quan hệ giữa lực và chuyển vị trong dầm như trên H.13.22. Ở trạng thái 1, trong dầm tích lũy một thế năng biến dạng đàn hồi U_1 được tính như sau:

$$U_1 = \frac{1}{2} P y_o$$

Đặt $\delta = \frac{y_o}{P}$ là chuyển vị tại điểm va chạm do lực đơn vị gây ra. Thế vào biểu thức trên ta có:

$$U_1 = \frac{1}{2\delta} y_o^2$$



Hình 13.22. Đồ thị tính TNBĐĐH

Ở trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi U_2 trong dầm là:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(y_d + y_0)^2}{\delta}$$

Như vậy khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm được tích lũy thêm một lượng:

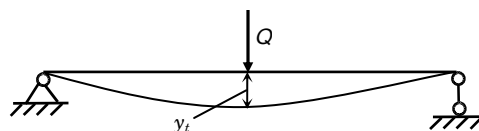
$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2\delta} \{(y_d + y_0)^2 - y_0^2\} = \frac{1}{2\delta} (y_d^2 + 2y_d y_0)$$

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta} + P y_d \quad (d)$$

Thay các biểu thức (b), (c), (d) vào (13.25) ta có:

$$\frac{y_d^2}{2\delta} + y_d P = \frac{1}{2} \frac{Q^2 V_o^2}{g(P+Q)} + (P+Q)y_d$$

Gọi y_t là chuyển vị của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng Q tác dụng tĩnh tại đó gây ra như trên H.13.23. Thay $y_t = Q\delta$ vào phương trình trên, ta được:



Hình 13.23. Sơ đồ tính chuyển vị y_t

$$y_d^2 - 2y_t y_d - \frac{y_t V_o^2}{g(1 + P/Q)} = 0 \quad (e)$$

Nghiệm của phương trình bậc hai (e) là:

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1 + \frac{P}{Q})}}$$

Vì $y_d > 0$, nên chỉ chọn nghiệm dương của (e), tức là:

$$y_d = y_t + \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1 + \frac{P}{Q})}} = y_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V_o^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \right) = K_d y_t \quad (13.26)$$

Do đó hệ số động được tính bởi:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.27)$$

Khi vật Q rơi tự do từ độ cao H xuống đầm, tức là $V_0 = \sqrt{2gH}$, thay vào (13.27):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.28)$$

Khi tại điểm va chạm không có trọng lượng đặt sẵn $P = 0$, hệ số động tăng lên: $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$ (

Khi $P = 0$, $H = 0$, nghĩa là trọng lượng Q đặt đột ngột lên đầm:

$$K_d = 2 \quad ($$

Theo (13.29), khi y_t càng lớn, nghĩa là độ cứng của thanh càng nhỏ, thì K_d càng nhỏ, do đó sự va chạm càng ít nguy hiểm.

Để đảm bảo điều kiện bền, người ta có thể làm tăng y_t bằng cách đặt tại điểm chịu va chạm những vật thể mềm như lò xo hay tấm đệm cao su...

Khi đã tính được K_d , có thể tính đại lượng S khác trong hệ tương tự như chuyển vị, nghĩa là:

$$S_{tp} = K_d S_t^Q + S^P \quad (13.31)$$

S_t^Q là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do Q coi như đặt tĩnh lên hệ tại mặt cắt va chạm gây ra.

S_t^P là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do các tải trọng hoàn toàn tĩnh đặt lên hệ gây ra.

Điều kiện bền: $\sigma_{d,\max} \leq [\sigma]$

Chú ý:

Nếu chọn móc thế năng bằng không ở vị trí dầm không biến dạng, thì cơ năng ban đầu của hệ chính là thế năng:

$$\pi = QH$$

Ngay sau khi va chạm, P và Q cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc V thì cơ năng của hệ chính là động năng:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 = \frac{Q}{(P+Q)} QH < \pi$$

Như vậy đã có sự mất mát năng lượng tương ứng với giả thiết va chạm mềm tuyệt đối của 2 vật thể; năng lượng này làm cho 2 vật thể biến dạng hoàn toàn dẻo, áp sát vào nhau và chuyển động cùng vận tốc về phía dưới.

2- Va chạm ngang

Xét một dầm mang vật nặng P . Vật nặng Q chuyển động ngang với vận tốc V_o và chạm vào vật nặng P như trên H.13.24. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật Q va chạm P cả hai vật cùng chuyển động ngang và đạt chuyển vị lớn nhất y_d .



Hình 13.24. Hệ một bậc tự do chịu va chạm ngang

Lập luận như trường hợp va chạm đứng, ta cũng có:

Vận tốc của hai vật P , Q cùng chuyển động ngay sau khi va chạm là:

$$V = \frac{Q}{P+Q} V_o$$

$$\text{Độ giảm động năng trong hệ: } T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2$$

Vì hai vật chuyển động theo phương ngang, nên không có sự thay đổi thế năng, tức là:

$$\pi = 0$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ là:

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Nguyên lý bảo toàn năng lượng, $T+\pi = U$, ta được phương trình sau:

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Lấy giá trị nghiệm dương của y_d , ta được:

$$y_d = \sqrt{\frac{\delta Q V_o^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.32)$$

Ta lại có $\delta = \frac{y_t}{Q}$, với y_t là chuyển vị ngang của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng Q tác dụng tĩnh nằm ngang tại đó. Thay vào phương trình (13.32) như sau:

$$y_d = y_t \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} = y_t K_d \quad (13.33)$$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.34)$$

Khi không đặt sẵn trọng lượng chịu va chạm, tức $P = 0$, hệ số động là:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{gy_t}} \quad (13.35)$$

Khi đó, nội lực, ứng suất cũng được tính như sau:

$$M_d = M_t \cdot K_d$$

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot K_d$$

.....

Điều kiện bền: $\sigma_{d,max} \leq [\sigma]$

Ví dụ 13.5 Một dầm công xon tiết diện chữ nhật (20×40) cm chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng $Q = 1$ kN rơi tự do từ độ cao $H = 0,5$ m

(H.13.25.a). Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm. Nếu kể đến trọng lượng bản thân dầm q , tính lại ứng suất và độ võng. Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), tính lại ứng suất và độ võng. Cho: $E = 0,7 \cdot 10^3$ kN/cm²; $q = 0,64$ kN/m.

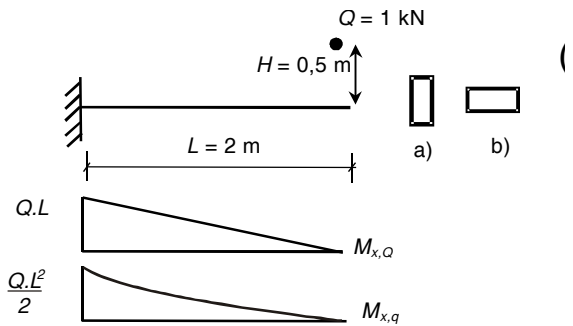
Giải. Ứng suất động:

$$\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d$$

với: $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$

Không kể trọng lượng bản thân dầm, ta có:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1(200)^3}{3(0,7 \cdot 10^3) \frac{20 \cdot 40^3}{12}} = 0,0357 \text{ cm}$$



Hình 13.25 Dầm công xon chịu va chạm

Hệ số động : $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357}} = 53,93$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm (H.13.25):

$$\begin{aligned}\sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{W_x} K_d \\ &= \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} (53,93) = 2,02 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Độ võng lớn nhất tại đầu tự do:

$$y_{\max} = y_{t,\max,Q} K_d = 0,0357(53,93) = 1,92 \text{ cm}$$

Khi kể đến trọng lượng bản thân, có thể dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$ (qL là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357(1 + \frac{0,3}{1})}} = 47,43$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} . 47,43 = 1,78 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2.100}{20.40^2 / 6} = 0,024 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

$$\sigma_{\max} = 1,78 + 0,024 = 1,804 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do

Độ võng do trọng lượng bản thân:

$$y_t = \frac{qL^4}{8EI_x} = \frac{0,64.10^{-2}(200)^4}{8(0,7.10^3) \cdot \frac{20.40^3}{12}} = 0,017 \text{ cm}$$

Độ võng khi có va chạm:

$$y_{d,\max} = y_{t,\max,Q} K_d + y_{t,q} = 0,0357.47,43 + 0,017 = 1,71 \text{ cm}$$

Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), ta được:

- Không kể trọng lượng dầm:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1.(200)^3}{3(0,7.10^3) \cdot \frac{40.20^3}{12}} = 0,143 \text{ cm}$$

$$\text{Hệ số động : } K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143}} = 27,46$$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm :

$$\begin{aligned}\sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{W_x} K_d \\ &= \frac{1.(200)}{40.20^2 / 6} (27,46) = 2,06 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

$$\text{Độ võng tại đầu tự do: } y_t = 0,143.(27,46) = 3,93 \text{ cm}$$

- Kể đến trọng lượng bản thân, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$ (qL là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143(1 + \frac{0,3}{1})}} = 24,21$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{40.20^2 / 6} . 24,21 = 1,816 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2.100}{40.20^2 / 6} = 0,096 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

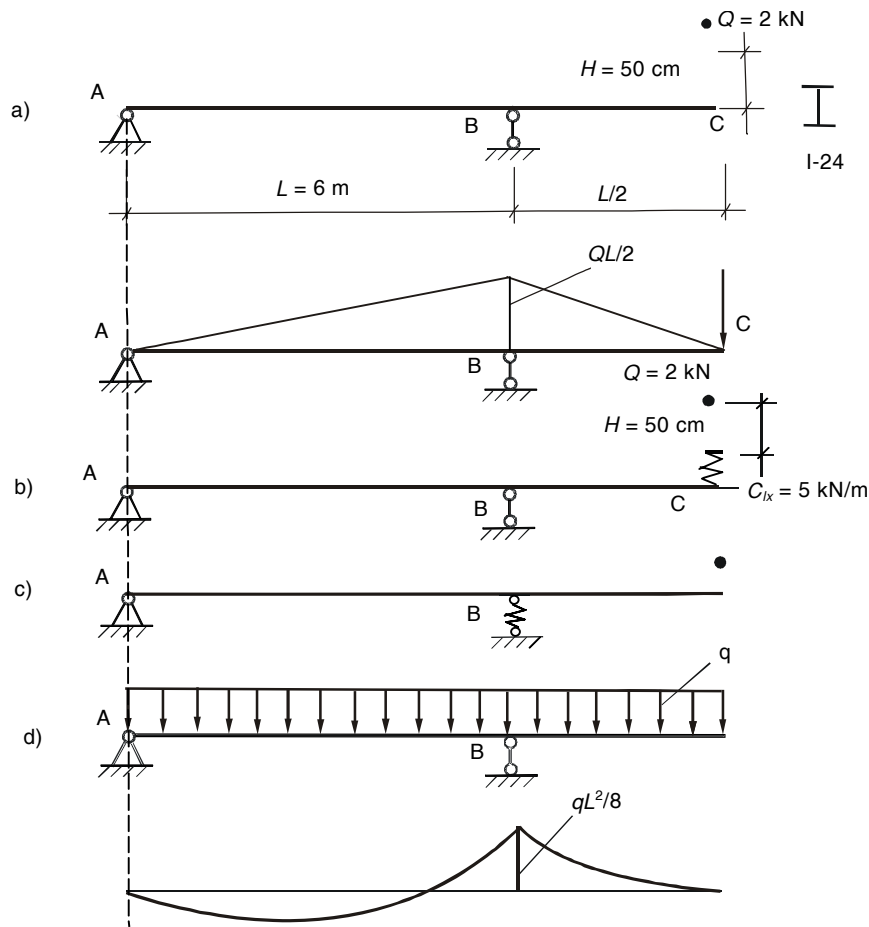
$$\sigma_{\max} = 1,816 + 0,096 = 1,912 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do:

$$y_t = 0,143.(24,21) + 0,017 = 3,48 \text{ cm}$$

Ví dụ 13.6 Dầm ABC tiết diện I-24 chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng $Q = 2 \text{ kN}$ rơi tự do từ độ cao $H = 50 \text{ cm}$ (H.13.26.a), bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính $\sigma_{\max}$; kiểm tra bền. Cho: I-24 có: $I_x = 3460 \text{ cm}^4$, $W_x = 289 \text{ cm}^3$, $q = 0,273 \text{ kN/m}$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 13.24 a) Hệ chịu va chạm không có lò xo
b) và c) Hệ chịu va chạm có lò xo; d) Dầm chịu trọng lượng bản thân

Bây giờ, đặt một lò xo có $C_{IX} = 5 \text{ kN/m}$ tại C để đỡ vật va chạm Q (H.13.24.b), tính lại hệ số động và $\sigma_{\max}$; xét lại điều kiện bền. Nếu không đặt ở C mà thay lò xo vào gối tựa tại B (H.13.26.c), hệ số động là bao nhiêu?

Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Không kể trọng lượng bản thân dầm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} = \frac{1 \cdot (600)^3}{8(2 \cdot 10^4) \cdot 3460} = 0,39 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,39}} = 17,04$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.21):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{2.W_x} K_d$$
$$\sigma_{d,\max} = \frac{1.(600)}{2.289} (17,04) = 17,69 \text{ kN/cm}^2 > [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Dầm không bền.

Chuyển vị tại C: $y_C = 0,39(17,04) = 6,64 \text{ cm}$

Xét trường hợp có lò xo đặt ngay tại điểm va chạm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{Q}{C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{1}{5} = 0,39 + 0,2 = 0,59 \text{ cm}$$

Hệ số động :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,59}} = 14,06$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.24):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1.(300)}{289} 14,06 = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{d\max} < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

dầm thỏa điều kiện bền.

Chuyển vị của dầm tại C: $y_C = 0,39(14,06) = 5,48 \text{ cm}$

giảm so với trường hợp trên.

Xét trường hợp có lò xo đặt tại gối B.

Bây giờ, chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{3}{2} \frac{(3Q/2)}{C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{3}{2} \frac{1}{5} = 0,39 + 0,3 = 0,69 \text{ cm}$$

$$\text{Hệ số động: } K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,69}} = 13,08$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.10.21):

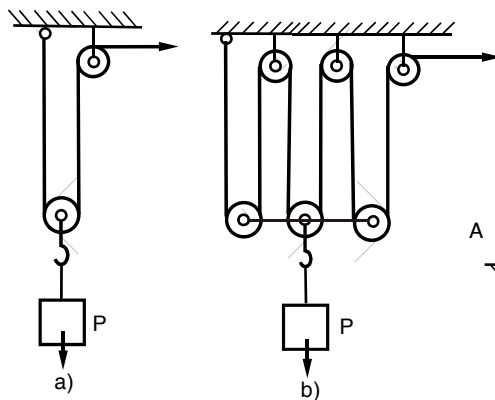
$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1 \cdot (300)}{289} 13,08 = 13,57 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị tại C: $y_C = 0,69(13,08) = 9,02 \text{ cm}$

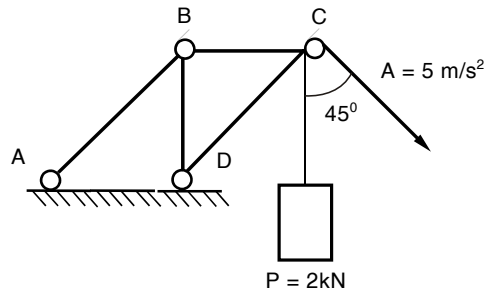
Trong trường hợp này, ứng suất giảm nhưng chuyển vị tăng so với khi đặt lò xo ở đầu tự do.

BÀI TẬP CHƯƠNG 13

- 13.1 Một vật nặng P được nâng lên cao với bằng hệ thống ròng rọc đơn giản như trên H.13.24.a. Nếu kéo dây cáp với gia tốc đều a , tính lực căng trên dây cáp. Nếu dùng hệ thống ba cặp ròng rọc và cũng kéo dây với gia tốc a thì lực căng là bao nhiêu?



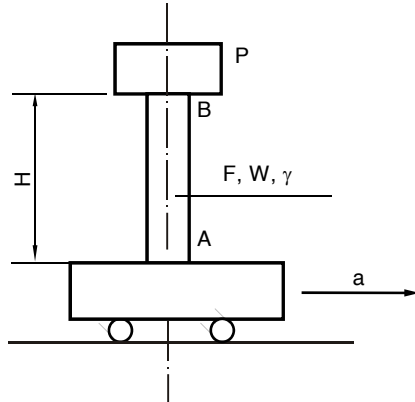
Hình 13.25



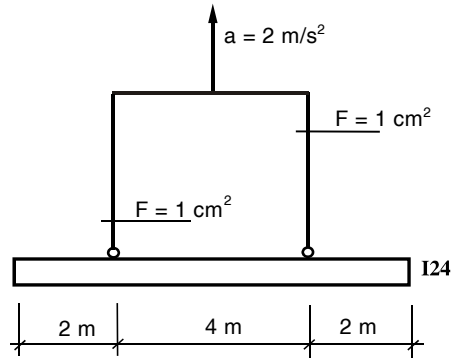
Hình 13.26

- 13.2 Một kết cấu nâng vật nặng P chuyển động lên với gia tốc a (H.13.26). Tính nội lực phát sinh trong các thanh AB, BC và CD.
- 13.3 Một trụ AB có chiều cao H , diện tích mặt cắt ngang là F , môđun chống uốn W , trọng lượng riêng là γ mang một vật nặng P . Trụ được gắn chặt vào một bộ vận chuyển theo phương ngang với gia tốc a (H.13.27).

Xem trụ bị ngàm tại tiết diện A vào bệ, xác định ứng suất pháp $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ tại mặt cắt nguy hiểm của trụ.



Hình 13.27

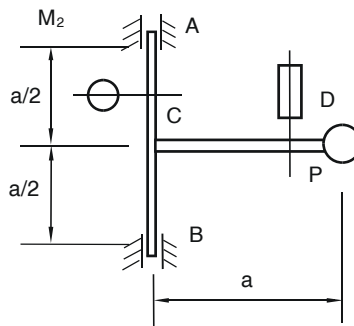


Hình 13.28

13.4 Xác định ứng suất pháp lớn nhất trong dây cáp và trong dầm I-24 do tác dụng đồng thời của trọng lực và lực quán tính khi hệ được kéo lên với gia tốc a (H.13.28).

13.5 Một trục tiết diện tròn AB đường kính D mang một thanh CD tiết diện chữ nhật $b.h$, đầu thanh CD có một vật nặng trọng lượng P , hệ quay quanh trục AB với vận tốc $n = 210$ vg/ph (H.13.29). Tính ứng suất lớn nhất trong thanh CD và trục AB.

Cho: $a = 1$ m; $D = 4$ cm; $h = 2b = 6$ cm; $P = 0,1$ kN.

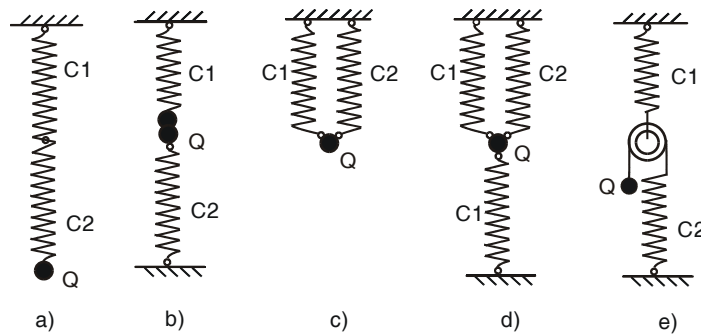


Hình 13.29

Chương 13: Tải trọng động

Bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

13.6 Tính tần số góc và chu kỳ dao động của các hệ vẽ trên H.13.30, C_1 và C_2 là độ cứng của lò xo.



Hình 13.30

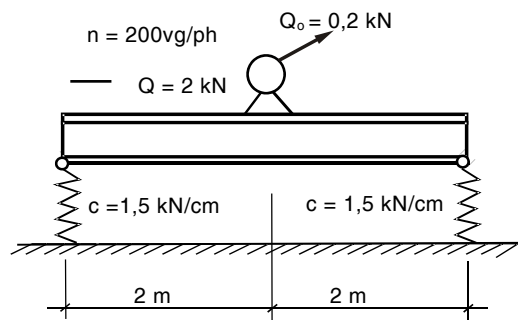
13.7 Một dầm đơn giản mặt cắt hình chữ I số 40 dài 8 m mang một trọng lượng 20 kN ở giữa nhịp. Tính tần số riêng ω của hệ khi có kể và khi không kể đến trọng lượng dầm.

13.8 Một dầm thép I24 mang một mô-tơ nặng 2 kN tốc độ 200 vg/ph, lực quán tính do khối lượng lệch tâm là 0,2 kN (H.13.31). Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm và lò xo, xác định ứng suất động lớn nhất trong dầm trong các trường hợp sau:

a) Dầm I24 đặt theo phương đứng (I)

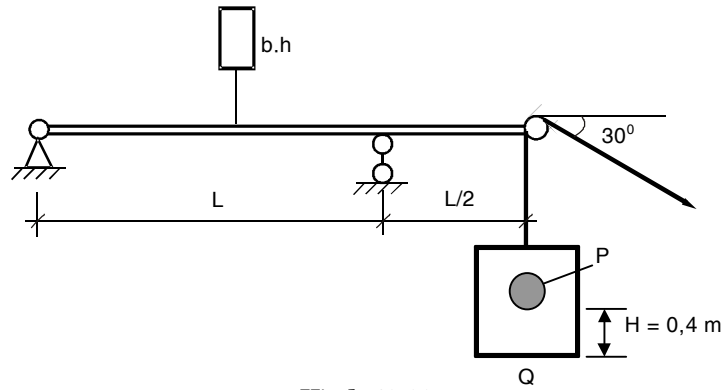
b) Dầm I24 đặt theo phương ngang ().

13.9 Giả sử hai gối tựa lò xo trên dầm ở



Hình 13.31

Chương 13: Tải trọng động

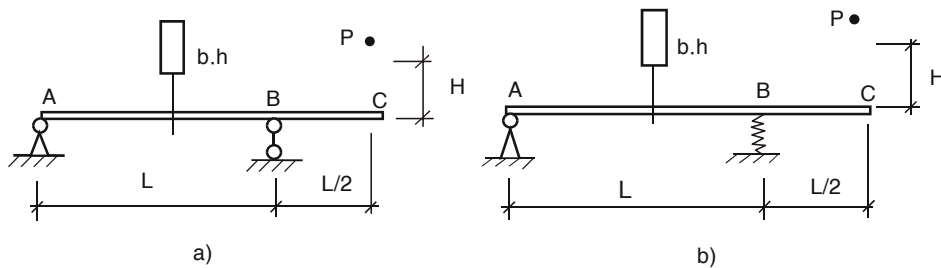


Hình 13.33

13.11 Một trọng lượng $P = 0,5 \text{ kN}$ rơi từ một độ cao $H = 10 \text{ cm}$ xuống đầu C của một dầm tiết diện chữ nhật $b \times h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$, dài $L = 4 \text{ m}$ (H.13.34.a). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm

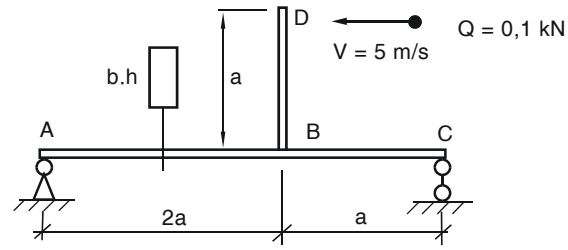
Nếu thay gối tựa B bằng một lò xo có đường kính $D = 100 \text{ mm}$, đường kính sợi thép $d = 10 \text{ mm}$, số vòng làm việc $n = 10$ (H.13.34.b). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm.

Cho: $E_{\text{dầm}} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $G_{\text{lò xo}} = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 13.34

13.12 Xác định ứng suất của dầm khi vật bị va chạm ngang (H.13.35). Cho: $a = 2 \text{ m}$; $b.h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$. Thanh DB tuyệt đối cứng.



Hình 13.35